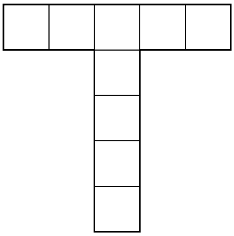
EXERCICE 3

ÉNONCÉ

On dispose
- d'un damier carré formé de 10×10 petits carrés identiques ;
- d'une pièce d'un seul tenant obtenue en accolant successivement par au moins un coté 9 petits carrés identiques à ceux du damier.

Le problème consiste à poser plusieurs exemplaires identiques de cette pièce sur le damier en respectant les règles suivantes :
- chaque exemplaire peut être tourné ou retourné ;
- chaque petit carré constituant les exemplaires recouvre exactement un petit carré du damier ;
- deux exemplaires ne peuvent pas se chevaucher.

1) Dessiner l'une des solutions si on pose quatre exemplaires de la pièce représentée ci-contre :



2) Montrer que, quelle que soit la forme de la pièce de départ, il est possible de poser deux exemplaires de cette pièce en respectant les règles ci-dessus.

3) Peut-on, dans la question précédente, remplacer deux par trois, par quatre, par cinq, etc. ?

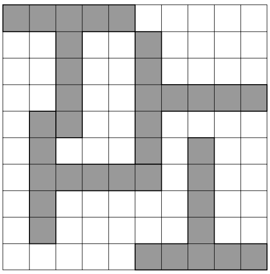
SOLUTIONS

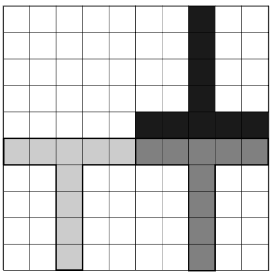
Les diverses solutions proposées relèvent des mêmes stratégies, mais elles restent plus ou moins au niveau des questions posées.
D'où des rédactions variées proposées ci-après, dans l'ordre croissant d'explications détaillées et surtout, d'investissement théorique …

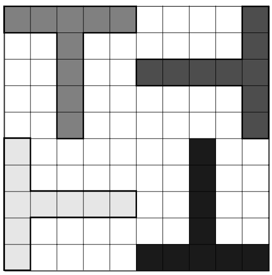
N.B. Un assemblage, par accolement d'au moins un côté, de n carrés unités s'appelle généralement « polymino d'ordre n » ou « n-omino ».

SOLUTION 1 (en majeure partie, apport de la Guadeloupe)

1 - La première question admet un grand nombre de réponses, par exemple :







2 - On peut partager le damier en deux rectangles 5×10 et remarquer que toute forme construite avec 9 carrés loge dans un de ces rectangles.
Cela introduit à la démarche essentielle qui permet de résoudre la question 3 : loger la forme donnée dans un rectangle aussi petit que possible.

3 - En observant la « longueur » et la « largeur » de chaque forme, on constate que toute forme de 9 carrés loge dans un rectangle de 1×9 ou 2×8 ou 4×6 ou 5×5.
C'est-à-dire dans un rectangle de taille $a \times (10 - a)$ pour $0 < a \leqslant 5$.

(N.D.L.R. : le troisième exemple de la question 1, proposé par Claude BAISNÉE, utilise l'invariance du carré-damier dans une rotation de $k\pi/2$ autour de son centre (k entier). Cela conduit fort bien à la figure A : il suffit de loger en coin le polymino d'ordre n et de faire tourner…)

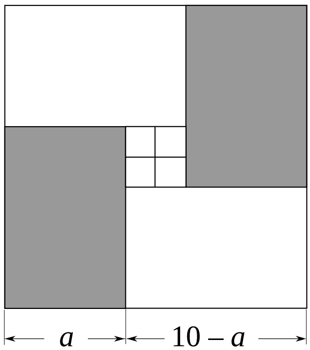
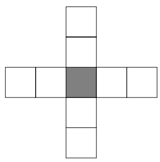


figure A

Donc, quelle que soit la forme de départ, il est possible de poser 4 exemplaires en respectant les règles.

En revanche, il n'est pas possible de poser cinq « croix ».



En effet, considérons la position du carré central (gris). Celui-ci est nécessairement à l'intérieur du carré 6×6 obtenu en retirant sur les bords du damier des bandes de largeur 2.
Diviser ce carré 6×6 en quatre carrés de taille 3×3 (figure B) que nous appellerons « carrés B ».

Comme il y a 5 carrés au centre des 5 croix, un des « carrés B » doit contenir au moins 2 des petits carrés (gris) situés au centre d'une croix, ce qui conduit à une contradiction.

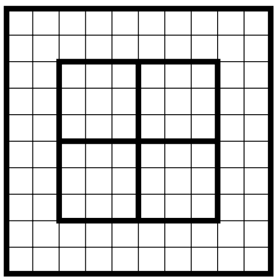
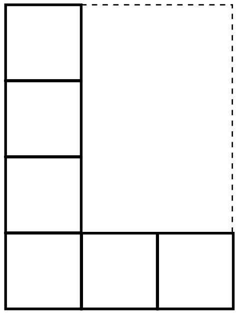


figure B

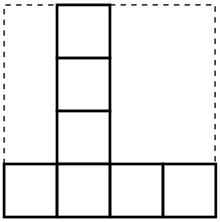
SOLUTION 2 (Due à Claude Baisnée, Caen)

- La construction de la pièce à poser sur le damier se fait en accolant successivement neuf petits carrés. Prenons comme unité de longueur le côté d'un petit carré et examinons les dimensions de la pièce construite.

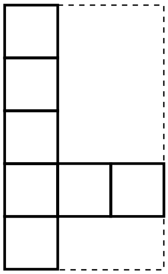


Exemple : avec six petits carrés déjà placés, on a obtenu la pièce ci-contre qui a pour dimensions 3 et 4, c'est-à-dire qu'elle peut être contenue dans un rectangle de côtés 3 et 4.

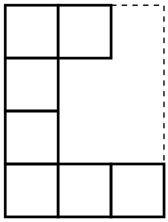
Regardons l'influence sur les dimensions de la pièce de la pose du septième petit carré.



Le carré ajouté augmente de 1 l'une des dimensions de la pièce qui, maintenant, est contenue dans un rectangle de côté 4 et 4.

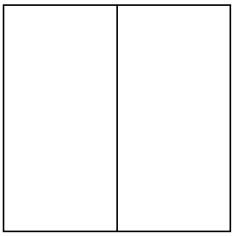


Le carré ajouté augmente de 1 l'autre dimension de la pièce qui, maintenant, est contenue dans un rectangle de côtés 3 et 5.



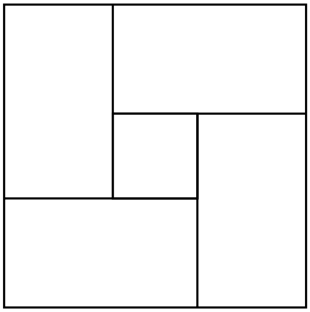
Le carré ajouté n'augmente aucune des dimensions de la pièce qui est toujours contenue dans un rectangle de côtés 3 et 4.

On peut affirmer que chaque carré ajouté augmente de 1 au plus l'une des deux dimensions de la pièce et donc de 1 au plus la somme des deux dimensions de la pièce. Le premier petit carré a pour dimensions 1 et 1 de somme 2. On ajoute 8 petits carrés, la somme des dimensions de la pièce obtenue est donc inférieure ou égale 2 + 8 soit 10.
Toute pièce formée de 9 petits carrés peut donc être contenue dans un rectangle de dimensions a et b telles que $a + b \leqslant 10$.



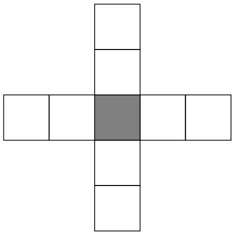
Partageons le damier en deux rectangles de côtés 5 et 10. Soit P une pièce quelconque pouvant être contenue dans un rectangle de côtés a et b où $a + b \leqslant 10$. L'un des nombres a et b au moins est inférieur ou égal à 5, puisque la somme est inférieure ou égale à 10. Donc la pièce P peut être contenue dans un rectangle de côté 5 et 10. On peut donc placer deux exemplaires de P sur le damier.

- Soit P une pièce quelconque de dimensions a et b où $a + b \leqslant 10$.

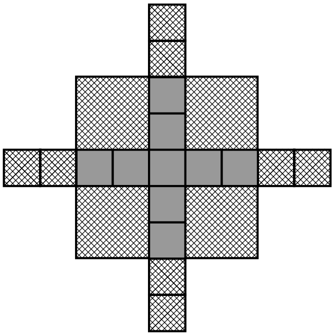


Partageons le damier selon le schéma ci-contre. Puisque $a + b \leqslant 10$, $b \leqslant 10 - a$. Un rectangle de côtés a et b est donc contenu dans un rectangle de côté a et $10 - a$.
Le damier contient 4 rectangles de côté a et $10 - a$ et peut donc recevoir 4 pièces P.
Il est donc possible, quelle que soit la pièce P, de poser quatre exemplaire de cette pièce sur le damier.

Nous allons maintenant prouver qu'il existe au moins une pièce pour laquelle on ne peut poser plus de quatre exemplaires.

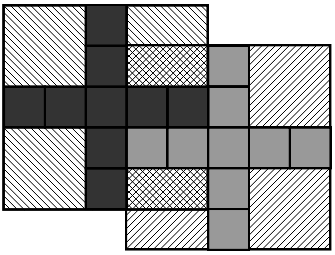


Considérons la pièce ci-contre.



Appelons zone d'influence de cette pièce la zone dans laquelle on ne peut placer le carré central d'une pièce voisine sans provoquer de chevauchement. Cette zone a la forme ci-contre. Elle est formée d'un carré de côté 5 avec des « excroissances » dont il n'est pas nécessaire de tenir compte pour la suite du raisonnement.

Les zones d'influence de deux pièces voisines peuvent se chevaucher, mais la largeur de la bande commune est inférieure ou égale à 2.
Or une pièce est en contact avec les frontières de sa zone d'influence (hors « excroissances ») qui doit donc être entièrement à l'intérieur du damier.



La longueur de la zone d'influence de deux pièces voisines placées sur le damier est donc au moins $2 \times 5 - 2$ soit 8, ce qui laisse sur le bord du damier une bande de largeur 2 au plus qui ne permet pas de placer une pièce supplémentaire.

Comme il en est de même dans la direction perpendiculaire, on ne pourra placer sur le damier plus de 2×2 soit 4 pièces.

SOLUTION 3 (Jury de Besançon)

Extraits pour les questions 2 et 3 :

Si le plus petit rectangle qui contient un n-omino a pour dimensions x_n et y_n, alors, compte tenu que les carrés unités sont attenant par un côté, si l'on rajoute un carré à ce n-omino, on obtient un $(n + 1)$-omino qui s'inscrit dans un rectangle de dimensions : $x_n \times y_n$ ou $(x_n + 1) \times y_n$ ou $x_n \times (y_n + 1)$.

En conséquence, $x_{n+1} + y_{n+1} \leqslant x_n + y_n + 1$.

Comme $x_1 = 1$ et $y_1 = 1$, alors $x_9 + y_9 \leqslant 10$ et il apparaît qu'un 9-omino est nécessairement à l'intérieur d'un rectangle de dimensions : 1×9 ou 2×8 ou 3×7 ou 4×6 ou 5×5.
[D'où la conclusion, positive, pour l'inscription de quatre 9-ominos].

Quant à l'inscription de cinq 9-ominos :

Considérons la pièce en forme de croix. Compte tenu que cette pièce est symétrique et qu'il y a dans les quatre directions deux carrés à côté du carré central, le carré central d'une croix voisine ne peut pas se trouver dans les cases marquées d'un $\times$ sur le dessin ci-dessous (fig. a).
En conséquence, dans un carré de 3 cases de côté du damier, il ne peut y avoir le carré central que d'une seule croix.
Par, ailleurs le carré central d'une croix doit se trouver à plus de 2 cases d'un bord du damier.

Les remarques précédentes et le découpage du damier ci-dessous (fig. b) montrent qu'on ne peut pas placer plus de quatre croix.

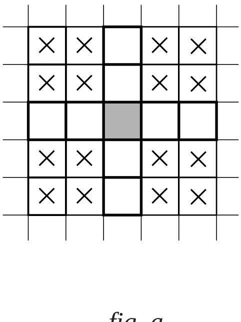


fig. a

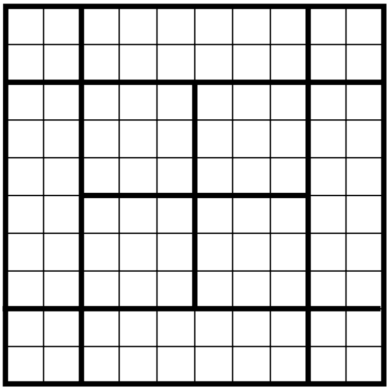


fig. b

<u>Conclusion</u> : On peut dans la question 2 remplacer deux uniquement par trois ou quatre.

SOLUTION 4 (Prélevée sur le site Olympiades de la Guadeloupe).

Pour résoudre l'exercice, le point clé est de démontrer qu'une pièce peut être inscrite dans un rectangle de taille $m \times n$ avec $m + n \leqslant 10$.
Montrons par récurrence qu'une pièce d'un seul tenant comportant p petits carrés peut être inscrite dans un rectangle de taille $m \times n$ où $m + n \leqslant p + 1$.
C'est vrai si $p = 1$ avec $m = n = 1$. Soit $p \geqslant 1$; on suppose l'assertion vraie pour toute pièce de p carrés. Soit P' une pièce de $p + 1$ carrés. Conformément à l'énoncé, elle est obtenue en accolant à une pièce P ayant p petits carrés un petit carré supplémentaire C ayant une arête en commun avec un carré de P. Soit R le rectangle $m \times n$ circonscrit à P ; par hypothèse de récurrence on a $m + n \leqslant p + 1$. Si C est inclus dans R on pose $R' = R$ et l'assertion est établie. Sinon, C a l'un de ses côtés en contact avec un côté K de R : dans ce cas, P' est incluse dans le rectangle R' obtenu en allongeant d'une unité les côtés perpendiculaires à K de façon que K soit intérieur à R'. Cette opération fournit un rectangle $m' \times n'$ tel que $m' + n' = m + n + 1 \leqslant p + 2$, ce qui achève la récurrence.

Deuxième façon de rédiger : le demi-périmètre du rectangle circonscrit à une p-pièce convenablement placée dans le plan Oxy est égal à la somme des longueurs des projetés de la pièce sur Ox et sur Oy. Quand on accole un petit carré supplémentaire, une de ces deux longueurs est inchangée, tandis que l'autre augmente d'au plus une unité. L'assertion en résulte par récurrence.

On raisonne désormais avec une pièce incluse dans un rectangle de taille $m \times (10 - m)$.

• On peut placer deux exemplaires dans le carré 10×10. Il suffit de remarquer que ce carré est réunion de deux rectangles 5×10 ; un exemplaire de la pièce peut être placé dans un tel rectangle car son rectangle circonscrit est de taille $m \times n$ avec $m + n \leqslant 10$; échangeant au besoin m et n, on peut supposer $m \leqslant 5$ et on a d'autre part $n \leqslant 10$.

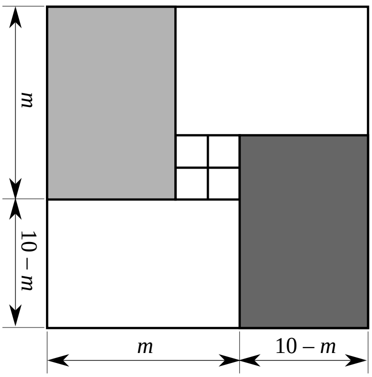


figure 2

Montrons qu'on peut placer quatre exemplaires de la pièce. On se reportera à la figure ci-dessus. On identifie le damier à la partie $E = [0,10] \times [0,10]$ du plan rapporté à un repère orthonormal. Dans E, on considère les quatre rectangles $R_1 = [0,m] \times [0,10 - m]$, $R_2 = [m,10] \times [0,m]$, $R_3 = [10 - m,10] \times [m,10]$, $R_4 = [0,10 - m] \times [10 - m,10]$. Les projections sur Ox de R_1 et R_2 sont $[0,m]$ et $[m,10]$ d'intersection réduite à $\{m\}$ donc R_1 et R_2 sont d'intérieurs disjoints ; il en est de même de R_3 et R_4 (projeter encore sur Ox), de R_1 et R_4, puis R_2 et R_3 (projeter sur Oy). Enfin R_1 est dans le demi-plan d'inéquation $x + y \leqslant 10$, tandis que R_3 est dans

celui d'inéquation $x + y \geqslant 10$: cela montre que R_1 et R_3 sont d'intérieurs disjoints ; il en est de même de R_2 et R_4 en considérant les demi-plans $x - y \leqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$.
Pour placer quatre exemplaires sur le damier, il suffit d'en placer un dans chaque rectangle R_i.

Remarque. La rédaction assez lourde qui précède est destinée ne pas dépendre d'une figure. Mais les candidats pourront se contenter de donner la figure 2 et la commenter clairement.

• Soit p la pièce en croix donnée dans la figure 3. Montrons qu'il est impossible de placer sans chevauchement cinq exemplaires de cette pièce dans un damier 10×10.
Repérons les cases du damier à l'aide des couples d'entiers (x,y) tels que $1 \leqslant x \leqslant 10$ et $1 \leqslant y \leqslant 10$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant 5$, plaçons le centre de l'exemplaire i de la pièce en position (x_i,y_i) ; les autres carrés de cet exemplaire sont alors placés en $(x_i + k,y_i)$ ou $(x_i,y_i + k)$ où k décrit $\{-2,-1,1,2\}$.
Pour que l'exemplaire i soit placé dans le damier, il faut (et il suffit) que $3 \leqslant x_i \leqslant 8$ et $3 \leqslant y_i \leqslant 8$.
Considérons le carré de taille 6×6 repéré par $F = \{3,...,8\} \times \{3,...,8\}$; les cinq couples (x_i,y_i) doivent appartenir à F.

• Partageons F en quatre carrés 3×3. Comme on a cinq couples (x_i,y_i) et quatre carrés 3×3, l'un des carrés doit contenir deux couples (x_i,y_i) et (x_j,y_j), où $i \neq j$. On aura alors $|x_i - x_j| \leqslant 2$ et $|y_i - y_j| \leqslant 2$.

Mais alors les deux exemplaires i et j se chevauchent sur la case (x_i,y_i)) : ce chevauchement prouve l'impossibilité annoncée.

REMARQUE (extraite du corrigé d'Animath)

On peut montrer qu'il existe :

• 1285 9-minos, en choisissant, comme dans ce problème, de considérer comme égales « deux pièces qui peuvent être tournées ou retournées l'une en l'autre ».

• 2500 sortes de pièces si l'on considère comme égales deux pièces en s'autorisant à tourner mais pas à retourner.

• 9910 si l'on s'interdit de tourner et retourner.

<u>*Référence*</u> *:* GOODMAN et O'ROUKE, *Handbook and computarial geometry* - CRC Press - 1997 - p. 229.

COMMENTAIRES

Voici d'abord celui de Michel Regnault, pour Caen :

Un problème original sur le thème des polyminos dont la résolution nécessite une vraie démarche constructive.

Comme dans l'exercice précédent, si la demande d'exemple ne pose pas de réel problème, elle a le double intérêt de mettre dans le bain et d'éviter, pour certains, que le dur sentiment de n'avoir rien fait devienne du ressentiment à l'égard de la compétition.

Montrer que tout 9-minos peut être enfermé dans un rectangle 5×10 donne la clé de la deuxième question, mais beaucoup, déroutés par cette notion de forme difficile à appréhender, n'ont voulu comparer que des aires, ce qui conduisait à l'échec. Aborder la troisième question nécessitait d'avoir déjà bien compris la démarche de la deuxième.

Pour Caen, la preuve correcte que toute pièce peut être enfermée dans un rectangle $a \times (10 - a)$ a été trouvée dans deux ou trois copies, mais pour la fin, seules figuraient les prémices de l'idée qu'il existait bien une pièce suffisamment encombrante pour que cinq exemplaires ne puissent pas être posés sur le damier.

... puis quelques autres commentaires :

ceux de Toulouse :

La phrase : « chaque exemplaire peut être tourné ou retourné » a troublé certains candidats. Ils n'ont pas compris qu'il s'agissait d'une règle pour poser les pièces. Pour eux, une fois la pièce posée, il fallait avoir la place de la tourner (on se demande comment) et de la retourner.

Un seul candidat a trouvé le contre-exemple de la dernière question (pour cinq pièces).

De façon générale :

- « Les justifications (Nantes) ont été souvent confuses et incomplètes »
- La première question est pratiquement toujours résolue
- La deuxième a déjà surpris pas mal de candidats, d'autant que, corroborant le commentaire de M. Regnault, les aires sont trop souvent intervenues !
- Les candidats qui ont bien résolu la Question 2 ont généralement su répondre à la Question 3 pour placer jusqu'à quatre 9-minos.
- Les candidats qui ont su montrer qu'il n'était pas possible de poser cinq 9-ominos sont rares, de zéro à quelques-uns selon les académies.