PREMIER SUJET

Sujet :

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n (on rappelle que la page numérotée 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés.

Quels sont le nombre de pages du livre et les numéros des pages collées ?

Solution 1 :

Soit n le nombre de pages du livre. Les pages collées sont une page de gauche de numéro pair $2p$ et une page de droite de numéro $2p + 1$.

Donc la somme de tous les nombres de 1 à n, hormis $2p$ et $2p + 1$, est égale à 2003, soit : $$\frac{n(n+1)}{2} - (4p+1) = 2003 \qquad (1)$$

Or $2 \leq 2p < n$ d'où $5 \leq 4p + 1 < 2n + 1$.

Alors $\dfrac{n(n+1)}{2} - (2n+1) < 2003 \leq \dfrac{n(n+1)}{2} - 5$, double inégalité qui conduit aux deux inéquations $$n^2 - 3n - 4008 < 0 \qquad (2)$$

et $$n^2 + n - 4016 \geq 0 \qquad (3)$$

(2) donne $n < \dfrac{3+\sqrt{16041}}{2}$ d'où $n < 64{,}83$

(3) donne $n \geq \dfrac{-1+\sqrt{16065}}{2}$ d'où $n > 62{,}87$.

n étant un entier, il existe deux possibilités de solutions : 63 et 64.
Essayons-les :

Si $n = 63$, (1) donne $4p+1 = \dfrac{63 \times 64}{2} - 2003$ soit $p = 3$.

Si $n = 64$, (1) donne $4p+1 = \dfrac{64 \times 65}{2} - 2003$ soit $p = 19$.

En conclusion :

ou bien le livre a 63 pages et les pages 6 et 7 sont collées ;

ou bien le livre a 64 pages et les pages 38 et 39 sont collées.

N.B. : *On ne pénalisera pas un élève qui considérerait que le nombre de pages d'un livre est nécessairement pair.*

Variante

Cette variante, indiquée par « BESANÇON » (René LIGIER) *encadre plus strictement la somme S des numéros des deux pages collées* : la plus grande valeur de S est $n + (n - 1)$ soit $2n - 1$ et la plus petite est $1 + 2$ soit 3.

Dès lors $3 \leq \dfrac{n(n+1)}{2} - 2003 \leq 2n - 1$ et les deux inégalités à traiter sont :

$$\begin{cases} n^2 + n - 4012 \geq 0 \\ n^2 - 3n - 4004 \leq 0 \end{cases}$$

Les racines des deux trinômes sont respectivement :

$-63{,}8$; $62{,}8$ et $-61{,}8$; $64{,}8$.

D'où $n \geq 63$ et $n \leq 64$.

De là les deux solutions…

L'envoi de Besançon note, de plus, la pertinence de chacune des deux solutions : « [Elles] sont acceptables car, dans les deux cas, la page paire a un numéro inférieur à celui de la page impaire. Ce qui montre que l'on a bien affaire à deux pages de deux feuilles successives. »

Autre variante explicative

La pagination à droite est obligatoirement impaire. La page correspondante ne pourrait être collée qu'à la couverture, ce qui est exclu par l'énoncé. Le « collage » ne peut intervenir qu'à partir des pages 2 et 3 donc la plus petite valeur de S (définie ci-dessus) est 5

Si n est pair, l'énoncé exclut le collage de la page n. Alors le maximum de S est $(n - 1) + (n - 2)$, soit $2n - 3$.

Si n est impair, le maximum de S est $n + (n - 1)$, soit $2n - 1$.

D'où l'encadrement $5 \leq \dfrac{n(n+1)}{2} - 2003 \leq 2n - 1$. Etc.

Solution 2

Même début, jusqu'à (1) *incluse.*

(1) s'écrit aussi $n(n + 1) = 4008 + 8p$

$n(n + 1) = 8(501 + p)$.

Sans avoir fait « d'arithmétique », on peut en déduire que n et $n + 1$ étant consécutifs , donc l'un impair, l'autre doit être multiple de 8.

• Donc **n = multiple de 8**

ou **$n + 1$ = multiple de 8.**

• *S'il n'y avait pas eu de pages collées, nous aurions :*

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2003$$

soit $n^2 + n - 4006 = 0$ (2')

$\Delta = 1 + 16\,016$

de là une racine positive de (2') : $n \approx \dfrac{-1+126{,}55}{2}$ soit $n \approx 62{,}78$.

D'autre part, dans $\mathbf{N}^*$, $n^2 + n$ est une fonction croissante de n et doit être supérieur à 4006.

• *Essayons donc des valeurs de n supérieures à 62,78 et, d'abord, voisines :*

- *Pour n multiple de 8.*

Soit $n = 64$ $\dfrac{n(n+1)}{2} = 2080$ qui surpasse 2003 de 77

Les pages collées $2p$ et $2p + 1$ sont donc telles que $4p = 76$

d'où $2p = 38$ et $2p + 1 = 39$.

- *Pour n + 1 multiple de 8*

Soit $n = 63$ $\dfrac{n(n+1)}{2} = 2016$ qui surpasse 2003 de 13

Les pages collées sont alors 6 et 7.

• *D'autres multiples de 8 donnent-ils des solutions ?*

(1) s'écrit aussi $4p+1 = \dfrac{n(n+1)}{2} - 2003$.

Si n augmente de 8, le second membre augmente de $8n + 36$, donc $2p$, numéro de la première page collée, augmente de $4n + 18$, ce qui est impossible, le maximum d'augmentation de $2p$ étant n. *Il n'y a donc pas d'autres solutions.*

Variante

A partir de (2') : $\frac{n(n+1)}{2} > 2003.$

Soit $n^2 + n - 4006 > 0$

Compte tenu de la solution positive du trinôme, il faut que $n > 62{,}78$.
On n'essayera donc, en phase 2, que des multiples de 8 supérieurs à 62,78.

Etc.

Solution 3

(d'après Vincent LAVIRON, 2ème lauréat national)

• Après avoir donné la condition $n^2 - 3n - 4004 \leq 0$ (3) (Cf. variante de la solution 1), *Vincent Laviron essaie, pour n la valeur 65.*

Cette valeur 65 rend $n^2 - 3n - 4004$ positif (le trinôme est alors égal à 26). Donc 65 est extérieur à l'intervalle des racines du trinôme.

Or celui-ci a deux racines : l'une négative, l'autre positive (puisque « $\frac{c}{a}$ » est négatif).

Il s'ensuit que 65 est supérieur aux racines, autrement dit, tout n, qui vérifie la condition (3) est inférieur à 65.

• *D'autre part, avec $n \leq 62$* $\frac{n(n+1)}{2} \leq 1953$ donc $n > 62$.

• Il ne reste plus qu'a essayer 63 et 64. Etc.

Solutions 4

Elles procèdent surtout par essais. En voici un exemple – imaginé - ...

• Soit n le nombre de pages. La somme 1 + 2 + 3 + … + n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$ (formule connue, ou retrouvée, … ou découverte …).

• $\frac{n(n+1)}{2} > 2003.$

Essayons d'approcher 2003 par des valeurs de n.

Par exemple à partir de x tel que $\frac{x^2}{2} = 2003$, auquel cas $x \approx 63{,}29$ ou $\frac{(x+1)^2}{2} = 2003$, auquel cas $x + 1 \approx 63{,}29$, donc $x \approx 62{,}29$.

• Il convient dès lors d'essayer d'essayer (en dessous, rien ne fait dépasser 2003) $n = 63$, $n = 64$, …

- **Si $n = 63$**, alors $\frac{n(n+1)}{2} = 2016$

  Or, 2016 déborde 2003 de 13, somme des deux numéros (entiers consécutifs) des pages collées. Ceux-ci sont donc 6 et 7 (qui sont bien « en regard », donc « collables »).

- **Si $n = 64$**, alors $\frac{n(n+1)}{2} = 2080$. D'où … etc. … les pages 38 et 39.

- **Si $n = 65$**, alors $\frac{n(n+1)}{2} = 2145$

  D'où un « dépassement », par rapport à 2003, de 142.
  Ce qui est impossible à deux titres :
  - la somme de deux entiers consécutifs ne saurait être paire,
  - 142 dépasse les possibilités avec 65 pages … (maximum des « collées » : 65 + 64).

- **Si $n > 65$**, la somme $1 + 2 + \ldots + n$ augmente de $n + 1$ lorsque n augmente de 1 [elle passe à $1 + 2 + \ldots + n + (n + 1)$] tandis que le maximum des « collées » augmente de 2. Or, déjà, avec $n = 65$, …

Solution 5

(Communiquée par Eric Trotoux)

Parmi les méthodes conduisant à une réponse, *on pourrait utiliser une calculatrice programmable qui fournit très rapidement des réponses.* On y implante l'algorithme suivant qui teste naïvement toutes les situations pour un livre de n-max pages. En prenant d'emblée n-max = 100 (ce qui paraît peut-être un peu faible dans la « réalité »), on trouve deux réponses.

Voici l'algorithme :

```
Initialisations      T ← 0  (T est la variable qui
                            contient la somme des n°
                            de pages)
```

	`ℓ ← {} (ℓ est la variable « liste » qui met en réserve les solutions)`
`Boucle et test`	`Pour n de 1 à n-max faire`
	`T ← T + n`
	`Si 5 <= T - 2003 <= 2n - 1 alors`
	`écrire (n,(T - 2004)/2) dans ℓ`
	`Sinon ne rien faire`
	`Fin de Pour`
`Sortie de résultats`	`Afficher ℓ`

Bien sûr, cette approche « naïve » ne peut prétendre fournir toutes les réponses possibles. Mais on peut compléter de diverses façons (Cf. solutions précédentes).

Commentaires de la rédaction de la brochure

1- *Le nombre de pages d'un livre peut-il être impair ?*
Il s'agit de savoir si l'on compte toutes les pages entre la II et la III de couverture (cas 1) ou seulement les pages imprimées (cas 2).
Les éditeurs s'en tiennent volontiers au cas 1. Mais les bibliothécaires et les bibliographies « savantes » ont coutume d'utiliser exclusivement le cas 2.

On comprend donc :
- d'une part les réactions ou bien cantonnées dans le cas 1 ou bien à l'aise dans le cas 2 ;
- d'autre part les choix et la prudence (Cf. le « N.B. » final) du corrigé officiel ! Bravo !

2- *On sait bien qu'on peut trouver un résultat juste en dépit d'erreurs de parcours...*
Ainsi tel lauréat national (et non des moindres…) s'est-il trompé dans l'une des conditions imposées à $2p$ (avec les notations de la solution 1). Tout en acceptant que n soit impair, il écrit : $2p + 1 < n$ (au lieu de $2p + 1 \leq n$), ce qui exclut que ce soit les deux dernières pages (lorsque la dernière est à droite) qui soient collées…
Comme, ici, les deux dernières pages ne l'étaient pas, l'erreur a été sans conséquence … et a même pu passer inaperçue …

3- Cet exercice, proposé par l'Académie de Caen, *nous a semblé particulièrement bien choisi* : accessible, avec un peu de modélisation, éventuellement appuyée expérimentalement, et une mise en jeu de mathématiques simples, parfois relayables par des essais.

4- *Dans la multiplicité des approches*, chaque lecteur, chaque enseignant, aura ses préférences …
La solution 1, avec ses variantes, est probablement la plus performante et la plus éducative en fait de savoir ou savoir-faire mathématique.
Mais les autres ont aussi leurs mérites de « remue-méninges » !

5- Les conditions imposées à n, conditions (2) et (3) de la solution « officielle » ou de ses variantes, *sont nécessaires*. Elles ne sont pas automatiquement suffisantes. Pourtant, *si l'on se fie à l'énoncé*, il y a au moins une solution donc il est sûr qu'au moins l'une des deux valeurs émergentes de n sera solution …
Ici, il se trouve que ce sera les deux…

Commentaires reçus d'équipes académiques ou de divers enseignants

En général, des trois exercices « nationaux » celui-ci est, dans chaque académie, le mieux réussi… Du moins pour trouver « la » ou « les » solution(s). Les diverses méthodes ci-dessus indiquées sont alors sollicitées, … « parfois (cf. "méthodes" 4 ou 5) en utilisant une calculatrice et un peu … de flair… »

On trouve, nous dit-on, des résolutions « parfaites »
« soit par résolution d'équations et inéquations, comme proposé par le corrigé national, soit par recherche systématique avec une stratégie d'encadrement pour obtenir dans un premier temps le nombre possible de pages et, par soustraction, les pages collées. » (Montpellier).

Michel REGNAULT précise que, dans son académie, « les quelques candidats qui ont obtenu des valeurs correctes ont préféré, en général *écrire des équations correspondant aux cas extrêmes* : somme obtenue maximale quand les pages 2 et 3 sont collées (1 et 2 ne peuvent l'être, la page 1 étant toujours à droite et, donc, 2 au verso), et somme minimale quand ce sont les deux dernières pages qui sont collées (lorsque n est impair) ou l'avant-dernière et la précédente (lorsque n est pair). » Cela fait, dit Michel Regnault, « non sans quelques soucis sur la parité de n. »

Trop souvent, nous dit-on aussi, le fait d'avoir trouvé une ou des solution(s) ne s'accompagne pas de la démonstration qu'il n'y en a pas d'autres… Une académie suggère une possible culpabilité de l'énoncé qui, d'après elle, « pouvait, dans sa formulation, laisser croire qu'il y avait une unique solution ». Mais les candidats seraient-ils pour autant dispensés de le prouver ?

Toulouse signale que « *des solutions par expérimentation* ont été souvent trouvées et estimées par le jury ». Mais Montpellier remarque que si « certains élèves donnent le résultat sans que l'on puisse savoir quelle a été leur démarche, il est vraisemblable qu'ils n'ont pas osé exposer une stratégie qui leur a paru trop éloignée du discours mathématique habituel » ... *Il y a là de quoi nous interroger ! et grandement !*

La sommation de $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n$ *était à la base des raisonnements.* Des candidats en donnent immédiatement le résultat. D'autres, par exemple le premier prix national, le démontrent - par la méthode classique -D'autres encore semblent l'affronter pour la première fois tellement ils utilisent des méthodes originales ... Ainsi Besançon signale que « des élèves calculent à la main $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$, puis en déduisent par addition des dizaines que $11 + 12 + 13 + \ldots + 20 = 155$ et réitèrent ». Besançon ajoute, à juste titre, me semble-t-il, « Nous avons largement valorisé ce type d'astuce... ».

Pas trop de pessimisme donc !

D'autant que si beaucoup de comptes rendus déplorent des manques de rigueur, il en est qui, au contraire, relèvent que « le souci de rigueur n'est pas absent : vérification sur la parité des pages, l'existence d'une seconde solution mais de pas plus de deux ... » (Besançon).

Quant au sujet lui-même, Michel REGNAULT précise que « la pagination d'un livre offre un cadre concret idéal pour traiter de questions relatives à la suite des entiers naturels. Elle a donc souvent inspiré les auteurs de problèmes [...] ... On peut faire varier le type d'erreur : page omise, page comptée deux fois ... Bien sûr, on pourra changer le millésime, mais 2003 avait, outre son caractère de circonstance, l'avantage de fournir deux solutions ... » [Sans déroger au dogme international qui prescrit qu'un « livre » doit avoir plus de 49 pages !].