DEUXIÈME SUJET

Sujet :

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts A, B, C, D du plan tels que leurs distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD, CD, ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y. C'est par exemple le cas lorsque $ABCD$ est un carré, x est la longueur des côtés et y celle des diagonales.

1) Etude du cas « 1,5 » où l'une des distances est égale à x et les cinq autres à y.
   Montrer qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question. Dessiner cette configuration.

2) Etude du cas « 2,4 » où deux distances sont égales à x et les quatre autres à y.

   a) On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommet commun. Quelle configuration obtient-on ? La dessiner.

   b) Que se passe-t-il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet en commun ?

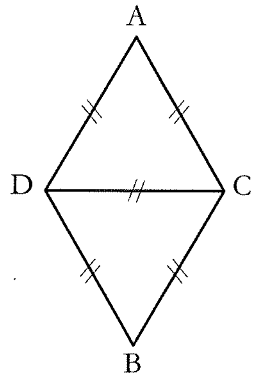
3) Etudier le cas « 3,3 ».

Solution :

1°) Le cas « 1,5 ».

Supposons que $AB = x$.
On a donc $AC = AD = BC = BD = CD = y$.
Les triangles ACD et BCD sont équilatéraux.

On obtient une seule configuration puisque $A \neq B$. (figure 1, ci-contre)



(N.D.L.R.) Cet exercice a fait l'objet du jeu-concours n° 42 de la revue « *Pour la Science* » [énoncé, n° 249, juillet 98, p. 6 ; solution, n° 251, Septembre 98, p. 6.]

2°) Le cas « 2,4 »

a) Posons $AB = CD = x$. On a donc AC, AD, BC, $BD = y$. Le quadrilatère cherché est un losange dont les diagonales ont même longueur, c'est le carré donné en exemple.

b) Posons $AB = AC = x$. On a donc AD, BC, BD, $CD = y$. Le triangle BCD est équilatéral, A est à l'intersection de la médiatrice de $[BC]$ et du cercle de centre D et de rayon y. On a donc deux configurations. (figures 2 et 3, ci-contre)

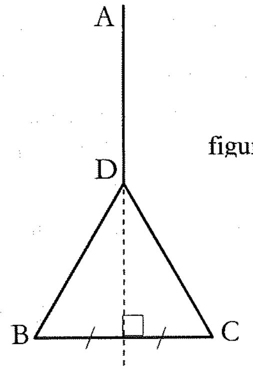


figure 2

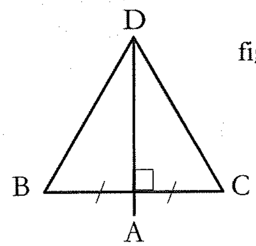


figure 3

3°) Le cas « 3,3 »

a) Les trois segments de longueur x sont disposés en étoile, par exemple $AB = AC = AD = x$ On a donc $BC = BD = CD = y$. Le triangle BCD est équilatéral et A est le centre de ce triangle (figure 4 ci-contre).

b) Les trois segments de longueur x forment un triangle équilatéral. On retrouve la précédente configuration.

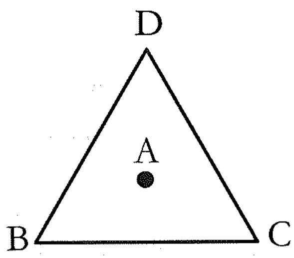


figure 4

Il reste le cas où les trois segments de longueur x forment une chaîne ouverte. Posons $AB = BC = CD = x$. On a donc $AC = AD = BD = y$. Les triangles BDA, DAC, ABC et BCD sont isocèles. Appelons O le point d'intersection des segments $[BD]$ et $[AC]$. Les triangles BDA et ADC d'une part, ABC et BCD d'autre part

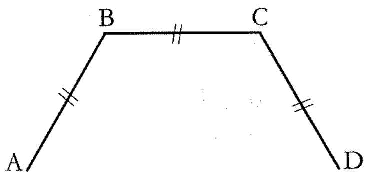


figure 5

sont isométriques (3ème cas). Les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{BDA}$ d'une part, $\widehat{DBC}$ et $\widehat{ACB}$ d'autre part sont égaux. Puisque les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOD}$ sont opposés par le sommet, ils sont égaux, ce qui entraîne l'égalité des quatre angles précédents et le parallélisme des droites *(BC)* et *(AD).* La configuration cherchée est un trapèze isocèle (figure 5)

Il convient de préciser les angles : le quadrilatère est un morceau de *pentagone régulier.*

❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄

Ce corrigé est un peu cursif.
Quelques équipes académiques diffusent des corrigés – aux mêmes conclusions – plus explicatifs pour la question 3. En voici quelques-uns :

Corrigé de Besançon (René LIGIER)

3. Cas « 3,3 »

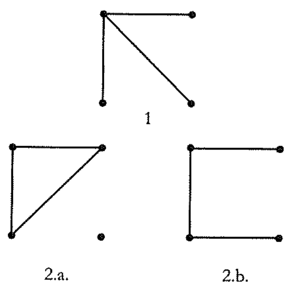
En choisissant trois segments dans une configuration de quatre points, on choisit aussi indirectement six extrémités. Il y a donc au moins un des quatre points qui est choisi au moins deux fois. On a alors deux situations possibles :

1. Un point est choisi trois fois.

   Les autres points sont donc choisis une fois chacun (1)

2. Deux points sont choisis deux fois.
   Il reste alors à nouveau deux possibilités :
   2.a. Un troisième point est choisi deux fois et, dans ce cas, la chaîne des trois segments est fermée (2.a)

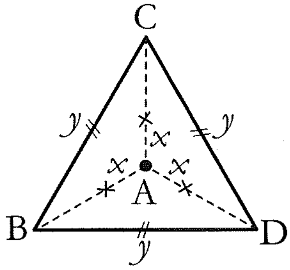
   2.b. Les deux autres points sont choisis une fois et, dans ce cas, la chaîne des trois segments est ouverte.(2.b).



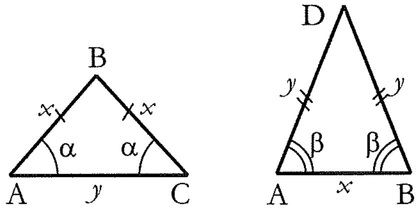
Remarquons que lorsqu'on choisit deux groupes de trois segments de même longueur, les situations 1 et 2.a. sont équivalentes puisque dans 2.a. le point restant remplit exactement les mêmes conditions que le point choisi trois fois dans 1.

Il y a donc, pour finir, seulement deux cas à traiter :

1er cas :
Un point est choisi trois fois. Notons-le A.
On a donc :
AB = AC = AD = x et BC = CD = DB = y
La seconde relation montre que BCD est un triangle équilatéral et la première montre que A est le centre du cercle circonscrit.



2ème cas :
Les segments de même longueur forment deux chaînes ouvertes. On a donc :
AB = BC = CD = x et CA = AD = DB = y.
Supposons que l'on ait $y > x$ et adoptons les notations de la figure ci-contre :

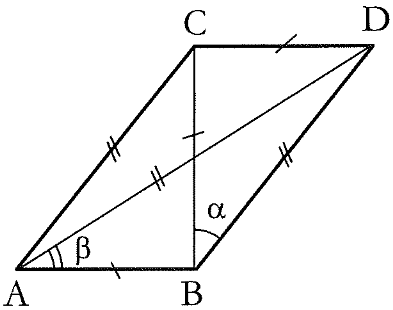


Si ABCD était un quadrilatère *croisé* alors ACDB serait un parallélogramme puisque AC = BD et AB = CD.

Dans ce parallélogramme, en comparant les angles en A des triangles isocèles ABC et BDA, on aurait $\alpha \geq \beta$.

Et en comparant de même les angles en B des triangles isocèles BDA et BCD, on aurait $\beta \geq \alpha$.

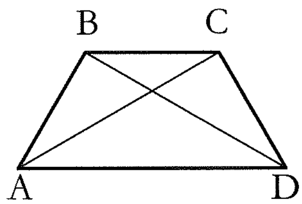
Les conditions $\alpha \geq \beta$ et $\beta \geq \alpha$ imposeraient alors $\alpha = \beta$.



Dans ce cas, les deux triangles de la figure précédente seraient isométriques (1er cas d'isométrie), ce qui n'est pas possible puisque $x \neq y$.

Donc ABCD ne peut être qu'un quadrilatère convexe.
Les sommes des angles des triangles BCD et ADC conduisent alors au système :

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = \pi \\ -\alpha + 3\beta = \pi \end{cases}$$



d'où l'on tire facilement $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$ et $\beta = \dfrac{2\pi}{5}$. On en déduit que $\beta - \alpha = \dfrac{\pi}{5}$, ce qui prouve que les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux et donc que les droites (AD)

et (BC) sont parallèles.
On peut finalement conclure que ABCD est un trapèze isocèle (avec la particularité AB = CD = BC).

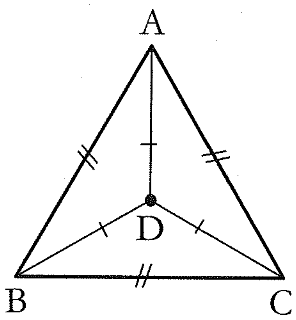
Remarque : Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ mesurent donc $\frac{3\pi}{5}$, ce qui achève de **prouver ABCD est un « morceau » de pentagone régulier.**

Corrigé d'Orléans-Tours

3. On distingue deux cas :

Cas 1 : un point apparaît trois fois dans un groupe de trois distances, donc il n'est pas dans l'autre groupe de trois distances, lequel ne contient que les trois autres points.
Par exemple :
AD = BD = CD = x et AB = AC = BC = y.

Alors ABC est équilatéral et D est le centre du cercle circonscrit à ABC, donc son centre de gravité.



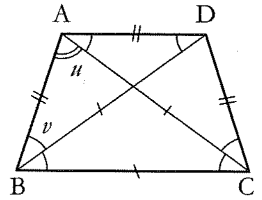
Cas 2 : aucun point n'apparaît trois fois dans un groupe, donc chaque groupe contient les quatre points (sinon un groupe ne contiendrait pas au moins un point, lequel apparaîtrait trois fois dans l'autre) et chaque point apparaît 2 fois dans un groupe et 1 fois dans l'autre.

Par exemple : AD = AB = CD = x et AC = BC = BD = y avec BC > AD ; les triangles BAD et ADC sont isométriques et isocèles en A et D (idem pour ACB et DBC) et donc $\widehat{BAD} = \widehat{ADC}$.

Là, il y a deux sous-cas à envisager :

Sous-cas 1 : *B et C sont de même côté de (AD) (voir la figure ci-contre).*

Puisque les triangles BAD et ADC sont isométriques, les points B et C sont situés à la même distance de la droite (AD) et donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.



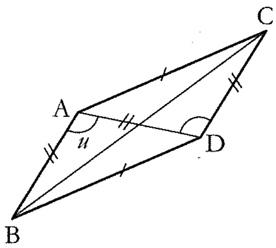
On a donc nécessairement un trapèze isocèle de petite base [AD] et grande base [BC].

Les égalités d'angles indiquées sur la figure résultent de BAD et ADC isocèles et isométriques et (AD)//(BC).

Réciproquement, si on considère un tel trapèze isocèle avec AD = AB = AC et $\widehat{BAD} = \widehat{ADC}$, on a forcément AC = BD (puisque BAD et ADC sont isométriques : 1 angle, 2 côtés adjacents égaux) mais AC = BC n'est pas forcément vérifiée : pour cela, il faut et il suffit que ACB soit isocèle en C, soit $u = 2v$ et comme $3v + u = \pi, v = \frac{\pi}{5}$ et $\widehat{BAD} = \frac{3\pi}{5}$.

Réciproquement, un tel trapèze (AD = AB = CD et $\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = \frac{3\pi}{5}$) donne $v = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$ et $u = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} = 2v$ et donc AC = BC.

Donc le trapèze isocèle ci-dessus correspond à une configuration « 3,3 » si et seulement si on a en outre : $\widehat{BAD} = \frac{3\pi}{5}$.



Sous-cas 2 *B et C sont de part et d'autre de (AD), voir figure ci-contre :*

AB = CD et AC = BD obligent ABCD à être un parallélogramme.

Donc (AB)//(CD) et on a nécessairement un parallélogramme dont une diagonale a même longueur que l'un des côtés.

Mais dans un tel parallélogramme, AC $\neq$ BC.

En effet, ADC étant isocèle en D, $\widehat{DAC} = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} + \frac{u}{2} \geq \frac{\pi}{2}$; le triangle ABC ne peut être isocèle en C.

En conclusion :

Le cas « 3,3 » est obtenu lorsque 3 points sont les sommets d'un triangle équilatéral et le 4$^{\text{ème}}$ le centre de gravité ou lorsque les quatre points sont les sommets d'un trapèze isocèle dont la petite base a même longueur que les côtés et dont les angles sont $\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$.

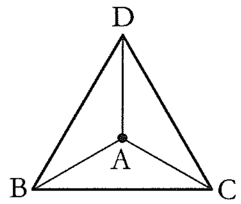
<u>Remarque</u> : les sommets du trapèze obtenu sont quatre sommets consécutifs d'un pentagone convexe régulier.

Corrigé de Caen (Claude Baisnée)

3- Trois distances sont égales à x, les trois autres sont égales à y.
Deux cas sont possibles :
- trois segments de même longueur ont une extrémité commune ;
- aucun des deux groupes de trois segments de même longueur n'a d'extrémité commune.

Envisageons successivement ces deux cas :

a) Supposons, par exemple, que les trois segments [AB], [AC] et [AD] ont la même longueur x, alors les trois segments [BC], [CD] et [BD] ont la même longueur y.

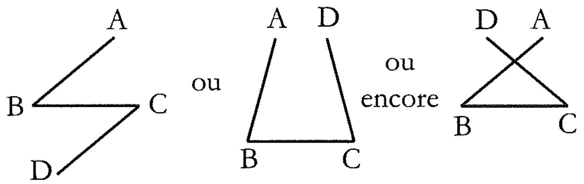


BC = CD = DB si et seulement si BCD est un triangle équilatéral. Alors AB = AC = AD si et seulement si A est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD.

Dans cette configuration, les deux groupes de segments ont bien des longueurs différentes, l'une, y, étant celle du côté d'un triangle équilatéral, l'autre étant celle du rayon du cercle circonscrit à ce triangle : $\dfrac{y\sqrt{3}}{3}$.

b) Aucun des deux groupes de trois segments de même longueur n'a d'extrémité commune.
Supposons, par exemple, que AB = BC = CD = x alors BD = DA = AC = y.
Supposons aussi, par exemple, que $x < y$.

Il faut AB = BC, BC = CD, AC = BD donc les triangles ABC et BCD doivent être isométriques. Alors, ou bien les points A et D sont de part et d'autre de la droite (BC), ou bien ils sont dans le même demi-plan de frontière (BC). Dans ce dernier cas, ou bien les segments [BA] et [CD] ont un point commun, ou bien ils n'en ont pas. Il y a donc *trois dispositions envisageables pour ces quatre points.*



• *Examinons le premier cas* :

Comme les triangles ABC et BCD sont isométriques, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles et ABCD est un parallélogramme.
Il existe dans un parallélogramme une relation entre les longueurs des côtés et celles des diagonales (liée au théorème de la médiane dans un triangle) qui s'écrit ici : $AB^2 + BD^2 + DC^2 + AC^2 = AD^2 + DC^2$, ce qui donnerait en fonction de x et y, $2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2$ qui n'a évidemment pas de solution avec des nombres strictement positifs. **Cette configuration ne convient pas.**

• *Examinons maintenant les deuxième et troisième cas* :

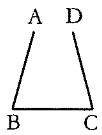
Appelons α la mesure commune des angles $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$.
Le théorème d'Al Kashi, dans le triangle ABC, donne

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \alpha$$

soit, en fonction de x et y, $y^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos \alpha = 2x^2(1 - \cos \alpha)$.

Or on a supposé $y > x$. Il faut donc $2(1 - \cos \alpha) > 1$ soit $\cos \alpha < \frac{1}{2}$ soit enfin $\alpha > 60°$.

En conséquence, les segments [AB] et [CD] n'ont pas de point d'intersection et la configuration doit donc être :



Cette configuration vérifie les conditions AB = BC = CD et AC = BD. Il reste à satisfaire AC = AD .

Calculons AD en fonction de x et α. Appelant H et K les projetés orthogonaux respectifs de A et D sur (BC), on peut écrire

$$AD = HK = BC - AB \cos \alpha - CD \cos \alpha.$$

(relation vraie que l'angle $\widehat{ABC}$ soit aigu ou obtus).

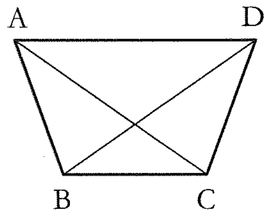
Alors $AD = x - 2x \cos \alpha = x(1 - 2\cos \alpha)$.

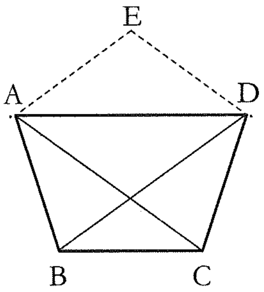
Donc AC = AD si et seulement si $AC^2 = AD^2$
si et seulement si $2(1 - \cos \alpha) = (1 - 2\cos \alpha)^2$
si et seulement si $4\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha - 1 = 0$.

Cette équation du second degré d'inconnue cos α a pour discriminant 20 et pour solutions : $\cos\alpha = \dfrac{2+\sqrt{20}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\alpha = \dfrac{2-\sqrt{20}}{8} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

La première solution étant supérieure à $\frac{1}{2}$ *ne convient pas d'après ce qu'on a vu précédemment.*

Il reste cos $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ *et la dernière configuration possible est donc celle représentée ci-contre :*



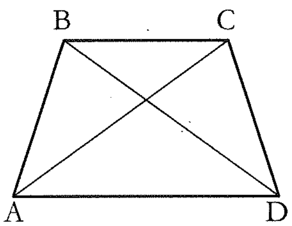


Remarque : Avec cos $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$, on peut démontrer(*) que 108° est alors la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. Cela signifie que les points A, B, C et D sont quatre sommets d'un pentagone régulier.

(*) N.D.L.R. : Une calculatrice propose aisément la valeur 108° lorsque cos $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$. Mais est-ce bien la valeur exacte ? La valeur 108° peut aiguiller vers le pentagone régulier, auquel cas on peut établir l'équivalence dans l'intervalle (0, 180°) – entre cos α et cos 180°. Sinon, il faut envisager des calculs trigonométriques, … ou utiliser les méthodes des corrigés précédents.

Une jolie étude

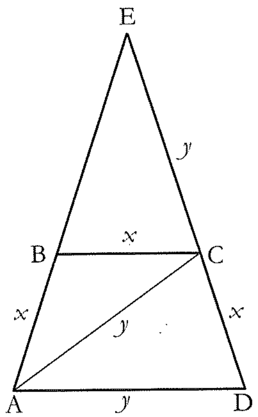
Elle concerne le cas du 3° où A et D sont d'un même côté de (BC).
En complément du travail de Besançon, René LIGIER a fait parvenir le joli plan d'étude ci-après.



Hypothèses :

AB = BC = CD
AC = AD = BD.

On montre par des arguments de symétrie et de distances que la configuration est celle donnée ci-dessus, en particulier que [BC] et [AD] ont même médiatrice.



(AB) et (CD) se coupent en E.

Les triangles DAC et BEC sont alors isométriques (isocèles, de même base et même angle à la base).

Appliquons Thalès : $\frac{y}{x} = \frac{x+y}{y} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}$

$\frac{y}{x}$ est donc **le nombre d'or** !

Le triangle BEC est donc un triangle d'or (angles : $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$) …

et la figure ABCD est extraite d'un pentagone régulier.

De son côté, **François LO JACOMO** nous a fait parvenir la solution suivante :

3. Si trois segments ont même longueur, ils ne peuvent pas joindre des sommets tous distincts, donc, quitte à renommer les points, on peut supposer que AB = AC, ce qui offre quatre possibilités (puisqu'il reste quatre autres segments) : AB = AC = AD, AB = AC = BC, AB = AC = BD et AB = AC = CD.

Si AB = AC = AD, on doit avoir également : BC = BD = CD, le triangle BCD est donc équilatéral et A est le centre du cercle circonscrit. Si AB = AC = BC, c'est ABC qui est équilatéral et D le centre du cercle circonscrit. Il est clair qu'une telle configuration est bien solution.

Les deux autres cas sont équivalents : les six segments se répartissent en deux chaînes de trois segments consécutifs égaux, CA = AB = BD et AD = DC = CB, ou bien BA = AC = CD et CB = BD = DA. En renommant les points, par commodité, on supposera que : AB = BC = CD, BD = DA = AC. On en déduit que :

- Les triangles ABD et DCA sont égaux, car ils ont leurs trois côtés égaux.
- Mais si B et C sont de part et d'autre de la droite (AD), les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{CDA}$ sont alternes internes, [AB] et [CD] sont parallèles et égaux, ABDC est un parallélogramme. Pour que BCD soit isocèle de somment C, il

faut que ses angles à la base soient aigus, en particulier l'angle $\widehat{BDC}$. Et de même, pour que ACD soit isocèle de sommet A, il faut que l'angle $\widehat{DCA}$ soit aigu. Ces deux conditions sont incompatibles, vu que les angles $\widehat{BDC}$ et $\widehat{DCA}$ sont supplémentaires.

- Si maintenant B et C sont de même côté de la droite (AD), B et C voient le segment [AD] sous le même angle, puisque les triangles ABD et DCA sont égaux, donc les quatre points A, B, C, D sont cocycliques. La médiatrice de [CD] passe par A, puisque AC = AD, ainsi que par le centre du cercle, et la symétrie par rapport à cette médiatrice transforme C en D, A en A et B en un point E du cercle tel que DE = EA = AB = BC = CD : cinq point ainsi disposés sur un cercle sont nécessairement les cinq sommets d'un pentagone régulier, A, B, C et D doivent donc être quatre des cinq sommets d'un pentagone régulier. Or cette configuration est bien solution car les cinq diagonales d'un pentagone régulier sont égales.

Commentaires des rédacteurs de la brochure

Cet exercice, proposé par DIJON[*], possède, comme le premier, toutes les qualités requises : accessible, se prêtant bien à des essais, progressif en ses questions et, au 3°, véritable exercice de recherche, aux multiples facettes. La géométrie en jeu est très élémentaire, mais riche d'ouvertures (le texte propre à René LIGIER en témoigne). Un beau problème, à partir d'une situation simple. Il ne peut, de plus, que susciter l'envie de prolonger, avec d'autres couples de valeurs de x et de y.

Commentaires d'équipes académiques

Michel REGNAULT s'interroge, puis donne des avis souvent fortement partagés :

« Comment sont disposés quatre points du plan dont les distances mutuelles ne peuvent prendre que deux valeurs ? On sent bien que les configurations sont relativement simples et régulières mais la difficulté tient tout d'abord dans l'organisation de l'analyse et dans l'élaboration d'une rédaction rigoureuse : il n'est pas commode d'établir une classification en utilisant des notions de base de la géométrie métrique qui n'ont pas toujours été clairement énoncées en cours, et quelle liberté d'expression "à l'ordre des points près" donne-t-elle pour

---

[*] Voir la N.D.L.R. au début de ce sujet.

choisir les exemples de segments de longueur x et ceux de longueur y, sans nuire à la généralité de la démonstration ?

La recherche est aidée par trois questions bien graduées : la première s'intéresse à la situation la plus simple car la plus contraignante, la deuxième guide l'analyse en proposant deux cas et la troisième reste totalement ouverte.

Les copies, pour la plupart, contenaient quelques résultats partiels, le plus souvent sous forme de figures à peine commentées, et restaient très pauvres en justifications de démarche ; elles se limitaient aux deux premières questions, mais parfois une des configurations de la troisième était donnée. »

- **De l'équipe de Corse :** « Des figures, mais peu de raisonnements par conditions nécessaires… »

- **De l'équipe d'Amiens** (à propos des questions 1 et 2.a) : « Les candidats se contentent d'exhiber une configuration pour toute démonstration, en particulier l'unicité n'est pas justifiée. »

- **De l'équipe d'Aix-Marseille** (à propos de la question 3) : « La plupart des élèves ont donné une seule configuration, celle du triangle équilatéral avec le centre du cercle circonscrit. Cinq élèves ont donné la deuxième configuration, un seul a fait les calculs d'angles. »

- **De l'équipe de Poitiers :** « Beaucoup de candidats trouvent dans chaque cas une solution, mais peu d'entre eux pensent qu'un même cas puisse conduire à plusieurs solutions distinctes et surtout, très peu montrent que les figures qu'ils proposent sont effectivement les seules solutions qui existent.

En particulier, la figure formée de 4 points d'un pentagone régulier a rarement été proposée dans le cas « 3,3 » et a encore moins été étudiée avec toute la rigueur souhaitée. »

- **De l'équipe de Toulouse** : « Souvent la plupart des figures ont été trouvées, cependant la qualité des réponses vaut par la justification des constructions ; celle-ci a été plus rare et a constitué un facteur important du classement. »

- **Une académie** ou « aucun élève n'a trouvé la figure de la dernière question », ne se satisfait pas du corrigé « officiel » qui, dit-elle, « pose un problème puisqu'il sous-entend que pour les premières questions il n'y a pas lieu de vérifier l'unicité et d'obtenir des éléments sur x et y alors que, pour la dernière question, on demande de préciser la structure de la figure ».

- Enfin, par-delà les regrets, **Montpellier** ajoute : « C'est dans cet exercice que nous avons trouvé, lors de la correction, les raisonnements les plus intéressants, montrant à la fois une bonne connaissance des configurations géométriques classiques et une analyse correcte des conditions imposées. »