TROISIÈME SUJET

Sujet :

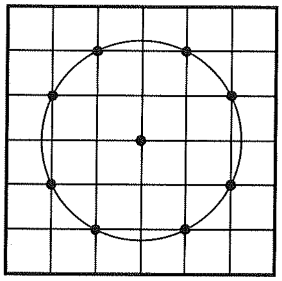
René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec de très belles dalles carrées de 0,5 m de côté.

Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec les pieds sur le bord et un parasol central.

René est un bricoleur prévoyant, aussi, pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés dans le sol. Tout comme le parasol car on n'est jamais à l'abri d'un coup de vent…

Mais René est aussi un bricoleur soigneux ; alors pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation.

La figure ci-contre donne un exemple de table à huit pieds.



Si n désigne le nombre de pieds de la table et d son diamètre exprimé en mètres, on définit le *coefficient de solidité* s de la table par la formule $s = \frac{n}{d}$. Une table est donc d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.

1. Calculer le coefficient de solidité de la table dessinée ci-dessus.

2. Quelles sont les deux tables les plus petites ? Précisez leur coefficient de solidité.

3. Quel est le coefficient de solidité maximal d'une table à 12 pieds ?

4. Quelle est la table la plus solide ?

5. René peut-il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre exprimé en mètres est un nombre entier ?

Solution « officielle »

On choisit le centre O de la table pour origine, le côté de la dalle comme unité, on note [II'] et [JJ'] les deux diamètres qui suivent les joints de séparation et R le rayon de la table.

Un pied est ainsi assimilé à un point à coordonnées entières dans le repère orthonormal d'origine O et d'axes (II') et (JJ').

Le problème revient alors à chercher des couples d'entiers $(a,\ b)$ vérifiant la relation $a^2 + b^2 = R^2$.

Le tableau (T) ci dessous donne les premières sommes $a^2 + b^2$ avec a et b positifs, soit pour un quart de table, ce qui, pour des raisons de symétrie, est bien suffisant.

(T) :

5	25	26	29	34	41	50
4	16	17	20	25	32	41
3	9	10	13	18	25	34
2	4	5	8	13	20	29
1	1	2	5	10	17	26
0	0	1	4	9	16	25
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Notons que si a ou b est strictement supérieur à 5, $a^2 + b^2 > 25$.

1. On a $R = \sqrt{5}$ donc $s = \dfrac{8}{2\sqrt{5} \times 0{,}5} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}57$

2. Le tableau (T) montre que les deux plus petites tables ont pour rayons respectifs 1 et $\sqrt{2}$.

Si $R = 1$ la table a 4 pieds, d'où $s = \dfrac{4}{2 \times 0{,}5} = 4$.

Si $R = \sqrt{2}$ la table a encore 4 pieds d'où s = $\dfrac{4}{2\sqrt{2} \times 0{,}5} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$.

3. La table à 12 pieds la plus solide est la plus petite car, si n est constant, $s \geq s' \Leftrightarrow d \leq d'$.

<u>Si R est un nombre entier</u>.

Il y a déjà 4 pieds en I, I', J et J'. Il reste alors, pour des raisons de symétrie, 2 pieds par quart de table et le nombre R^2 doit apparaître quatre fois dans le tableau (T).

La première solution apparaît pour $R = 5$. On a alors $s = \dfrac{12}{10 \times 0{,}5} = 2{,}4$.

Si R n'est pas un nombre entier.
Il n'y a pas de pieds en I, I', J et J'. Il y a alors 3 pieds par quart de table et donc, le nombre R^2 doit apparaître trois fois dans le tableau (T).
Comme aucun nombre n'apparaît trois fois dans le tableau, il est clair que dans ce cas, une table à 12 pieds a un rayon strictement supérieur à 5.

Conclusion
La table à 12 pieds la plus solide est celle de rayon 5. En conséquence, le coefficient de solidité maximum d'une table à 12 pieds est 2,4.

4. La table la plus solide ?

Si R n'est pas un nombre entier
Le nombre de pieds par quart de table est au maximum égal à la partie entière de R. On la note E(R). Comme il n'y a pas de pied en I, I', J, J', on a

$n \leq 4\mathrm{E}(R) < 4R$ et donc $s = \dfrac{n}{2R \times 0,5} = \dfrac{n}{R} < 4$.

Si R est un nombre entier
Il y a déjà 4 pieds en I, I', J et J' et donc au maximum $R - 1$ pieds par quart de table ouvert (c'est-à-dire sans les extrémités).
Donc $n \leq 4(R-1) + 4 = 4R$ et comme précédemment, $s \leq 4$.
Si $s = 4$ alors $N = 4R$ et donc il y a exactement $R - 1$ pieds par quart de table, ce qui impose en particulier un pied de coordonnées $(R - 1, 1)$.
Mais $(R-1)^2 + 1^2 = R^2 \Leftrightarrow R = 1$.

Conclusion
Toutes les tables sauf la plus petite ont un coefficient de solidité strictement inférieur à 4. La table la plus solide est donc la plus petite.

5. Si une table a 16 pieds et un rayon entier, il y a trois pieds par quart de table ouvert. Pour des raisons de symétrie, il doit y avoir des pieds sur les bissectrices des angles $\widehat{IOJ}$ et $\widehat{I'OJ'}$. On a alors nécessairement un couple (a, b) avec a et b positifs, pour lequel $a = b$. Notons-le (a_0, b_0).

On en déduit $R = a_0\sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2} = \dfrac{R}{a_0}$

Mais si R est entier, $\dfrac{R}{a_0}$ est rationnel. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, René ne pourra pas construire cette table.

Précision pour le début du 5. (apportée par Besançon) :

Comme une dalle mesure 0,5 m, si d exprimé en mètres est un nombre entier, alors R, qui est exprimé en nombre de dalles, est lui aussi entier.

Solution 2 (Dijon)

1- Le diamètre de la table est $d = 2\times\sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{5}$ m.

On a donc $s = 8\times\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}57$.

2- Appelons O le centre de la table et r son rayon. Un cercle de centre O et de rayon r est susceptible de représenter le dessus de la table s'il passe par les nœuds du quadrillage de maille 0,5m.
Le premier cercle a donc comme rayon 0,5 m, la table T_1 associée a 4 pieds, son coefficient de solidité est $s_1 = 4/1 = 4$.

Le second cercle a comme rayon $0{,}5\times\sqrt{2}$ m, la table T_2 associée a 4 pieds, son coefficient de solidité est $s_2 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$.

3- Supposons que n = 12. Le coefficient de solidité est $s = \frac{12}{d}$. Il est donc d'autant plus grand que d est petit. A chaque point M on associe sur le quadrillage un triangle rectangle OHM où l'on peut supposer pour des raisons de symétrie, OH $\geq$ HM. Choisissons comme unité 0,5 m, a = OH, b = HM sont des entiers naturels.

Pour obtenir une table à 12 pieds, il faut trouver deux triplets distincts (a_1, b_1, c) et (a_2, b_2, c) avec $b_1 = 0$ et $a_2 > b_2$ ou $0 < b_1 < a_1$ et $b_2 = a_2$. $c = \text{OM} = \sqrt{a^2+b^2}$ doit être minimal. Les triplets possibles, ordonnés selon des grandeurs croissantes de a sont :

$a=1$: $\left(1{,}0{,}\sqrt{1}\right)$; $\left(1{,}1{,}\sqrt{2}\right)$;

$a=2$: $\left(2{,}0{,}\sqrt{4}\right)$; $\left(2{,}1{,}\sqrt{5}\right)$; $\left(2{,}2{,}\sqrt{8}\right)$;

$a=3$: $\left(3{,}0{,}\sqrt{9}\right)$; $\left(3{,}1{,}\sqrt{10}\right)$; $\left(3{,}2{,}\sqrt{13}\right)$; $\left(3{,}3{,}\sqrt{18}\right)$;

$a=4$: $\left(4{,}0{,}\sqrt{16}\right)$; $\left(4{,}1{,}\sqrt{17}\right)$; $\left(4{,}2{,}\sqrt{0}\right)$; $\left(4{,}3{,}\sqrt{25}\right)$; $\left(4{,}4{,}\sqrt{32}\right)$;

$a=5$: $\left(5{,}0{,}\sqrt{25}\right)$; au-delà, les rayons sont plus grands que 5.

La solution est donc la table de rayon 5 unités donc de diamètre 5 m. Son coefficient de solidité est s = 24.

4- Avec les notations de **3-**, considérons une table de rayon c unités. De l'égalité

$c^2 = a^2 + b^2$, on déduit que $a < c$ lorsque c n'est pas entier et $a \leq c$ lorsque c est entier. Etudions les deux cas :
- Si c n'est pas entier, $a < c$ signifie que le nombre maximum de pieds par quart de table est strictement inférieur à c, donc $n < 4c$ et $s < 4$ (l'unité représente 0,5 m).
- Si c est entier, le précédent raisonnement montre que $s \leq 4$.

Le coefficient de solidité maximal est donc 4. Il est atteint par la plus petite table.

On peut évidemment se poser la question de savoir s'il existe d'autres tables de coefficient 4. On sait déjà qu'une telle table a un diamètre entier et on a $a = c$ avec $a - 1$ pieds par quart de cercle. Le triplet $(a - 1, 1, a)$ est donc solution, ce qui implique $a^2 = (a - 1)^2 + 1$, soit $a = 1$. La seule table répondant à la question est donc la plus petite.

5- Avec les mêmes notations que dans la question 3, il existe nécessairement un couple (a, a) solution du problème. En effet, il doit exister 3 pieds sur chaque quart de cercle ouvert. On doit donc avoir $d = a\sqrt{2}$ mètres entier ce qui impliquerait $\sqrt{2}$ rationnel, ce qui est exclu.

Solution 3 (Orléans-Tours)

1- $s = \dfrac{8}{d}$ avec $d = 2\sqrt{(2\times 0{,}5)^2 + (0{,}5)^2} = \sqrt{5}$ et $s = \dfrac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}57$.

2- Le centre de la table doit être une intersection, donc le plus petit rayon possible est 0,5 (la table est inscrite dans un bloc de 4 carreaux) et $s = 4$.
Puis c'est un rayon égal à $0{,}5\times\sqrt{2}$ qui est possible (la table est circonscrite à un bloc de 4 carreaux) et $s = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

3- En fait, si on prend comme origine d'un repère le centre de la table, son rayon est $r = \sqrt{(0{,}5u)^2 + (0{,}5v)^2}$ avec (u, v) coordonnées d'un pied, u et v étant 2 entiers naturels non nuls.
Ainsi tout diamètre d d'une table vérifie $d^2 = u^2 + v^2$ avec u et v entiers naturels non nuls.
Il faut donc trouver le plus petit d (non nul) qui donne 12 pieds. Un pied étant défini par ses coordonnées (p, q) avec p et q entiers relatifs, il faut trouver le plus petit d tel qu'il y ait 12 couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $p^2 + q^2 = d^2$.

En procédant par essais successifs pour chaque équation :

- si $d^2 = 0^2 + 1^2 = 1$, il n'y a que 4 solutions (0, ±1) et (±1, 0) pour $p^2 + q^2 = 1$
- si $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, il n'y a que 4 solutions (±1, ±1) pour $p^2 + q^2 = 2$
- si $d^2 = 2^2 + 0^2 = 4$, il n'y a que 4 solutions (0, ±2) et (±2, 0) pour $p^2 + q^2 = 4$
- si $d^2 = 2^2 + 1^2 = 5$, il n'y a que 8 solutions (cf. l'énoncé) pour $p^2 + q^2 = 5$
- si $d^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, il n'y a que 4 solutions (±2, ±2) pour $p^2 + q^2 = 8$
- si $d^2 = 3^2 + 0^2 = 9$, il n'y a que 4 solutions (0, ±3) et (±3, 0) pour $p^2 + q^2 = 9$
- si $d^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, il n'y a que 8 solutions (±1, ±3) et (±3, ±1) pour $p^2 + q^2 = 10$
- si $d^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, il n'y a que 8 solutions (±2, ±3) et (±3, ±2) pour $p^2 + q^2 = 13$
- si $d^2 = 3^3 + 3^2 = 18$, il n'y a que 4 solutions (±3, ±3) pour $p^2 + q^2 = 18$
- si $d^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, il y a que 12 solutions (±3, ±4), (±4, ±3), (±5, 0) et (0, ±5) pour $p^2 + q^2 = 25$, cela

car en fait d^2 est un carré parfait (carré d'un nombre entier) et donc $d = 5$.

Donc le coefficient de solidité maximum pour une table à 12 pieds est $\frac{12}{5} = 2{,}4$.

4- Tous les coefficients de solidité calculés jusqu'à présent sont inférieurs ou égaux à 4. Montrons qu'effectivement la valeur maximum de s est 4, c'est-à-dire que le nombre de pieds est toujours inférieur ou égal à $4d$.

Il faut donc montrer que le nombre de couples (u, v) avec u et v dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $p^2 + q^2 = d^2$ est inférieur ou égal à $4d$:

- <u>soit d est entier</u> : il y a 4 solutions du type $(0, \pm d)$ et $(\pm d, 0)$ et pour les solutions du type (p, q) avec p et q non nuls, on a $|p| \leq d - 1$, donc au plus $2d - 2$ possibilités pour p $(\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(d-1))$ et comme pour chacune de ces possibilités il y a au plus 2 possibilités pour q, on obtient au plus $2(2d - 2)$ solutions soit en tout au plus $4 + 4d - 4 = 4d$ solutions.
- <u>soit d n'est pas entier</u> : il n'y a pas de solutions avec p ou q nuls et pour les solutions avec p et q non nuls, on a $|p| \leq k$ avec k le plus grand entier inférieur (strictement) à d, donc au plus $4k$ possibilités pour (p, q), nombre qui est inférieur à $4d$.

Le nombre de pieds est bien toujours inférieur à $4d$ et la valeur maximum de s est bien 4.

5- Il faut trouver un entier naturel d tel que l'équation $p^2 + q^2 = d^2$ admette exactement 16 couples solutions dans $\mathbb{Z}^2$. (voir début de Q3).

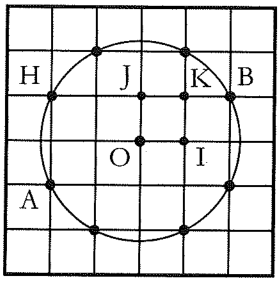
Nécessairement $p \neq q$ sinon on aurait $\sqrt{2} = \frac{d}{p}$, donc $\sqrt{2}$ serait un nombre rationnel, ce qui est faux.

Comme $(0, \pm d)$ et $(\pm d, 0)$ sont solutions, on ne doit avoir que 12 solutions avec p et q non nuls distincts, donc que 3 solutions avec $p > 0$, $q > 0$, p et q distincts.

Or si (p, q) est une telle solution, (q, p) en est une autre : donc le nombre de solutions avec $p > 0$, $q > 0$, $p \neq q$ ne peut être que pair et ainsi ne pourra être égal à 3.

On ne peut pas fabriquer une table à 16 pieds avec d nombre entier de mètres.

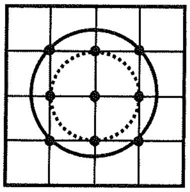
Solution 4 (Caen – Claude Baisnée)



1°) Les points A, B et H étant définis sur la figure ci-contre, $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ qui est le diamètre de la table en unités de longueur du repère, soit $AB = \sqrt{5}$ m.

Son coefficient de solidité est donc :

$s = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}578$ à 10^{-3} près par excès.



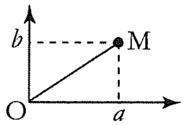
2°) Les cercles de plus petits rayons passant par des points du quadrillage sont représentés ci-contre.
Le plus petit passe par les points I et J et leurs deux symétriques par rapport à O et représente une table à 4 pieds de rayon 1 UL et donc de diamètre 1m.
Son coefficient de solidité est $s = 4$.

Le suivant passe aussi par 4 points du quadrillage : K et ses symétriques par rapport à O, par rapport à (OI) et par rapport à (OJ). Son rayon est la diagonale d'un carré de côté 1 UL et a donc pour longueur $\sqrt{2}$ UL. Son diamètre est donc $\sqrt{2}$ mètres.

Son coefficient de solidité est $s = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$ à 10^{-3} près par défaut.

3°) $s = \frac{n}{d}$. Donc, le nombre de pieds n étant fixé et égal à 12, s est une fonction décroissante de d. La table à 12 pieds la plus solide est celle de plus petit diamètre. (P) et ses images par des quarts de tour successifs de centre O partagent le plan en quatre parties semblables. Donc la table doit avoir 3 pieds dans (P).

Pour tout point M du plan, de coordonnées (a ; b), le cercle de centre O passant par M a un rayon dont le carré est égal à $a^2 + b^2$.



5		26	29	34	41	50
4		17	20	25	32	41
3		10	13	9	25	34
2		5	8	13	20	29
1		2	5	10	17	26
0	0	1	4	9	16	25
b/a	0	1	2	3	4	5

On peut dresser un tableau donnant, pour chaque couple de valeurs entières de a et b ($a \neq 0$ pour tout point de (P) sauf O), la valeur $a^2 + b^2$, ceci pour les plus petites valeurs de a et b.
25 est la plus petite valeur qu'on rencontre 3 fois dans le tableau et qui ne figurera que 3 fois, même si on étend le tableau, puisque $a^2 + b^2 > 25$ pour toutes les valeurs de a et b supérieures à 5.
La table a 12 pieds de coefficient de solidité maximal a pour rayon $\sqrt{25}$ UL soit 5 UL. Elle a pour diamètre 5 m et pour coefficient de solidité : $s = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$.

4°) Dans la partie (P) du plan, le cercle de centre O et de rayon R coupe chacune des droites d'équations $x = 1$, $x = 2$, …, $x = k$, k étant le plus grand entier inférieur ou égal à R. Ce cercle passe donc, au plus, par k points du quadrillage puisque ces points se trouvent sur les droites précédentes.
Une table de rayon R (en UL) a donc au plus k pieds dans (P) soit au plus $4k$ pieds au total. Son diamètre est $2R$ en UL, soit R en mètres.

Son coefficient de solidité est $s = \dfrac{n}{d}$. Or $n \leq 4k$ et $k \leq R$ donc $s \leq 4$.

Nous connaissons déjà une table dont le coefficient de solidité est égal à 4, c'est la table la plus petite de rayon 1 UL. Montrons maintenant qu'elle est la seule.

D'après ce qui précède, $s = 4$ si et seulement si $n = 4k$ et $k = R$. Ceci impose que R soit un nombre entier et que la table ait dans (P) un pied sur chacune des droites d'équations $x = R$, $x = R - 1$, …, $x = 1$.
De la même façon, le cercle de centre O et de rayon R coupe chacune des droites d'équations $y = 0$, $y = 1$, …, $y = R - 1$, $y = R$. Or le point de ce cercle d'ordonnée R a pour abscisse 0 et n'appartient donc pas à (P). Donc sur chacune des R droites d'équations $y = 0$, $y = 1$, …, $y = R - 1$, se trouve l'un des R pieds

de la table situés dans (P).
Les coordonnées des points du cercle vérifient l'équation $x^2 + y^2 = R^2$. Donc, à des valeurs décroissantes de l'abscisse correspondent des valeurs croissantes de l'ordonnée. Les coordonnées des pieds ne peuvent donc être que $(R\ ;\ 0)$, $(R-1\ ;\ 1)$, ... , $(1\ ;\ R-1)$. Or, le point de coordonnées $(R-1\ ;\ 1)$ appartient au cercle de centre O et de rayon R si et seulement si $(R-1)^2 + 1^2 = R^2$, soit $R = 1$.

La table de rayon 1 UL (de diamètre 1 m) est la table la plus solide.

5°) Le diamètre, en mètres, de la table cherchée devant être un nombre entier, son rayon en UL sera un nombre entier. Soit R ce rayon.
Une table de 16 pieds devra avoir 4 pieds dans (P).

R étant un nombre entier, le cercle de centre O et de rayon R passe par le point de coordonnées $(R\ ;\ 0)$ qui est un point de (P) sur [OI]. La table doit donc avoir 3 pieds dans (P) en dehors de [OI)
Or tout point de (P), en dehors de [OI), de coordonnées $(a\ ;\ b)$ $(a \leq b)$ a dans (P) un « jumeau » : le point de coordonnées $(b\ ;\ a)$.

Il n'est donc possible pour la table d'avoir 3 pieds (3, nombre impair) dans (P) que si elle possède un pied de coordonnées $(a\ ;\ b)$ avec $a = b$, c'est-à-dire un pied de coordonnées $(a\ ;\ a)$.

Il faut donc que ce point soit sur le cercle de centre O et de rayon R, soit $a^2 + a^2 = R^2$ ou $2a^2 = R^2$, R étant un entier, il n'existe par d'entier a tel que $2a^2 = R^2$ puisque 2 n'est pas un carré parfait.

René ne pourra donc pas construire la table de ses rêves.

Variante de la fin du 5° (d'après Vincent LAVIRON, 2ème prix national) :

Un pied doit être sur la bissectrice des quadrants des coordonnées. Etant à une intersection de joints, il doit se projeter sur les axes, en une intersection de joints distante de O :

- d'une part selon un nombre entier - d'autre part selon un nombre entier $\times\frac{\sqrt{2}}{2}$	ce qui est incompatible. Donc ...

Commentaires des rédacteurs de la brochure

Encore un bel exercice, doté des mêmes qualités que les deux autres

- Ici, la géométrie requise est encore plus élémentaire qu'à l'exercice 2. Mais sa mise en œuvre relève d'une bonne analyse.

- Il y a quelque concurrence sur les unités : d'une part le mètre, d'autre part le côté d'une dalle. Et, logiquement, puisque s est le quotient d'un nombre par une

longueur, s n'est pas un nombre …
On connaît notre propension, en parlant de grandeurs, à les citer sans assortir leurs mesures des unités choisies. Mais on sait aussi qu'éventuellement cela facilite des confusions. Ainsi, dans d'autres situations qu'ici, entre aire et périmètre …

Commentaires des équipes académiques

- De Poitiers :

Les questions 1 et 2 ont été traitées par la majorité des candidats.
La réponse à la question 3 a souvent été donnée, mais la justification était souvent insuffisante.
La question 4, la plus difficile de l'épreuve, n'a jamais reçu de commencement de réponse satisfaisant.
La question 5, pourtant difficile, a reçu plusieurs réponses complètes dans des copies qui ont été distinguées.

- De Montpellier, Nantes, Caen, Aix, Corse, Toulouse, Besançon, Bordeaux, Strasbourg, …

- Il est compté, sans utiliser tous les doigts d'une main, les candidats qui ont su répondre aux questions 4 ou 5, et ceux qui argumentent de façon pertinente. (Parfois on n'en trouve aucun…).

- « Des dessins approximatifs ont souvent tenu lieu de "justification" (fausse souvent). »

- Pourtant, quelques prestations d'élèves sont encourageantes :
    - « l'exercice 4 a donné lieu à quelques jolies idées » (Besançon). Dommage qu'elles n'aient pas été transmises …
    - « cet exercice est celui pour lequel est obtenue la meilleure moyenne » (Caen).

- Et Toulouse précise que « l'exercice a bien contribué au classement. »

- Michel REGNAULT (Caen) dresse un joli constat pour tous ceux, élèves ou enseignants, qui ont, dès le départ, opté pour une argumentation en géométrie analytique :
« Avant même que la table soit dressée, on sait que géométrie analytique et arithmétique sont au menu ! et le petit problème qui suit ne manque ni de charme ni d'originalité par la variété des raisonnements qu'il met en jeu.
Le départ se fait en douceur mais indique déjà que les points recherchés sont à coordonnées entières dans un repère "naturel" attaché au cercle étudié ; de plus, le texte précise "la table devra avoir le maximum de pieds", donc dès qu'un pied est posé, ses symétriques par rapport à l'origine et par rapport aux deux

axes de coordonnées devront être posés ; on réalise alors que le problème peut être ramené dans le quadrant ($x > 0$, $y > 0$) et que l'existence ou non de points solutions sur les axes jouera un rôle important dans la discussion. La vraie difficulté est dans le 4° et il est intéressant de pouvoir conclure le 5° en évoquant l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (vue en classe de seconde).

Ce problème a sans doute eu, en moyenne, plus de succès que les précédents car le support concret était simple et la situation modélisée pouvait sembler familière, mais dès la troisième question, les rangs des combattants se sont très vite éclaircis. »

- Une académie proteste contre le style de l'énoncé, trop « Kangourou » à son gré …

- Tandis que d'autres signalent que cet exercice a souvent été préféré aux autres parce que ses questions guidaient …