PREMIER SUJET NATIONAL

ÉNONCÉ

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *changeables* s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.
1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3) A quelle condition deux ***entiers*** u et v sont-ils échangeables ?

Les solutions qui suivent comportent parfois des points communs, mais alors avec des rédactions différentes

SOLUTION 1 (« nationale »)

1) Prendre $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$.

2) Supposons que $a - 7 = \sqrt{b+4}$ et $a - 4 = \sqrt{b+7}$; on élève au carré, on fait la différence, en écrivant

$$(a-4)^2 - (a-7)^2 = ((a-4)-(a-7))\,((a-4)+(a-7)) \ \ ;$$

il vient $a = 6$. C'est donc la seule valeur possible, or elle ne convient pas, puisqu'on aurait $\sqrt{b+4} = a - 7 = -1 < 0$.
Ainsi 4 et 7 ne sont pas échangeables.

Soient deux entiers distincts, disons $n < m$. Alors,
$\left\{\begin{array}{l} a-n = \sqrt{b+m} \\ a-m = \sqrt{b-n} \end{array}\right.$ si et seulement si :

$(i)\quad \left\{\begin{array}{l} (a-n)^2 = b+m \\ (a-m)^2 = b+n \end{array}\right.$ et $(ii)\quad \left\{\begin{array}{l} a-n \geqslant 0 \\ a-m \geqslant 0 \end{array}\right.$,

ce qui revient à dire $a \geqslant m$.

On a (i) si et seulement si $\left\{\begin{array}{r} (a-n)^2 = b+m \\ (a-m)^2 - (a-n)^2 = b+n-(b+m) \end{array}\right.$, soit encore $\left\{\begin{array}{c} b=(a-n)^2-m \\ (n-m)(2a-m-n)=n-m \end{array}\right.$; on peut diviser la deuxième équation par $n-m$ qui n'est pas nul ; il vient $a=\dfrac{m+n+1}{2}$.

En n'oubliant pas la condition (ii), on a donc démontré que la fonction f échange n et m si et seulement si

$$\{a=\frac{m+n+1}{2},\ b=(a-n)^2-m,\ \text{et } n+1 \geqslant m\}$$

Observons que par ailleurs $n+1 \leqslant m$ puisqu'il s'agit d'entiers. D'où $n+1=m$.

Conclusion : deux entiers sont échangeables si et seulement si ces entiers sont consécutifs ; nos calculs montrent qu'alors une et une seule fonction f réalise l'échange :

$$f(x)=n+1-\sqrt{x-n}.$$

SOLUTION 2 (d'Eric Trotoux)

Les question 1 et 2 préparent la 3 grâce à une expérimentation numérique.

Question 3 : a) Soient u et v deux entiers échangeables, tels que $u<v$. On peut écrire $v=u+k$ où $k \in \mathbb{N}*$. Nous avons alors au moins un couple (a,b) solution du système $\left\{\begin{array}{l} u=a-\sqrt{v+b} \\ v=a-\sqrt{u+b} \end{array}\right.$
Par différence membre à membre, nous déduisons :

$$k=\sqrt{u+k+b}-\sqrt{u+b}$$

. En posant $t=u+b>0$, il vient $k=\sqrt{t+k}-\sqrt{t}=\dfrac{k}{\sqrt{t+k}+\sqrt{t}}$ (1). De plus, $k \geqslant 2$ entraîne $\sqrt{k} \geqslant \sqrt{2}>1$. En minorant strictement le dénominateur de (1) par 1, on majore strictement l'expression par k.
En résumé, nous avons obtenu, pour $k \geqslant 2$, les relations *incompatibles* $k=\sqrt{t+k}-\sqrt{t}$ et $\sqrt{t+k}-\sqrt{t}<k$.
Ainsi, nous établissons par l'absurde que deux entiers non consécutifs ne sont pas échangeables.

b) Partons maintenant de $u \in \mathbb{N}$, $t = 0$ et $k = 1$. On a $\sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$. Dès lors, en posant $b = -u$ et $a = u + 1$, nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} u+1 & = & u+1-\sqrt{0} & = & a+\sqrt{b+u} \\ u & = & u+1-\sqrt{0+1} & = & a+\sqrt{b+(u+1)} \end{array} \right.$$

Cela montre que u et $u+1$ sont échangeables. Deux entiers consécutifs sont toujours échangeables.

Prolongement
1) Peut-on trouver une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = a - g(x) + b$ nous conduise au résultat « Deux entiers quelconques sont toujours échangeables. » ?

Voici quelques réponses positives :

$$g(t) = t \ ; \ g(t) = 2t + [t] \ ; \ g(t) = t + \sin(2\pi t)$$
$$g(t) = t + \sin\left(\pi(t^2 + t)\right) \ ; \ g(t) = t + h(t)$$

où $[t]$ est la fonction partie entière de et h une fonction quelconque dont la restriction à $\mathbb{N}$ est constante.

2) Peut-on trouver une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = a - g(x+b)$ nous conduise au résultat « Deux réels quelconques sont toujours échangeables » ?
Là aussi, $g(t) = t + c$ où c est une constante réelle, fournit une réponse. Une étude plus générale dépasse le cadre de $1^{\text{ère}}$S

SOLUTION 3 (d'André Guillemot)

1) Pour montrer que 2 et 3 sont échangeables il faut trouver deux réels a et b tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a - \sqrt{2+b} = 3 \\ a - \sqrt{3+b} = 2 \end{array} \right.$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations, il est nécessaire que $\sqrt{3+b} - \sqrt{2+b} = 1$.
$b = -2$ est une solution de cette équation ce qui permet de dire que $(3; -2)$ est une solution du système.
Donc 2 et 3 sont échangeables en utilisant $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$

2) Les entiers 4 et 7 sont-ils échangeables ?
Si oui, il est nécessaire de trouver une solution au système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{4+b} = 7 \\ a - \sqrt{7+b} = 4 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations, il est nécessaire que $\sqrt{7+b} - \sqrt{4+b} = 3$.
Cette équation est équivalente à $\sqrt{7+b} + \sqrt{4+b} = 1$ (en multipliant par l'expression conjuguée du premier membre).
La fonction $g : b \mapsto \sqrt{7+b} + \sqrt{4+b}$ est définie sur $[-4; +\infty[$ croissante.
Son minimum est $g(-4) = \sqrt{3}$ donc l'équation $g(b) = 1$ n'a pas de solution.
Les entiers 4 et 7 ne sont donc pas échangeables.

3) Les entiers u et v sont échangeables si et seulement si le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{u+b} = v \\ a - \sqrt{v+b} = u \end{cases}$$

admet une solution (on prend $u < v$).
En soustrayant membre à membre ces deux équations, il est nécessaire que $\sqrt{v+b} - \sqrt{u+b} = v - u$.
Cette équation est équivalente à $\sqrt{v+b} + \sqrt{u+b} = 1$ (en multipliant par l'expression conjuguée du premier membre).
La fonction $g : b \mapsto \sqrt{v+b} + \sqrt{u+b}$ est définie sur $[-u; +\infty[$ croissante.
Son minimum est $g(-u) = \sqrt{v-u}$.
Pour que l'équation $g(b) = 1$ puisse avoir une solution, il est nécessaire que $\sqrt{v-u} \leqslant 1$ c'est à dire $v - u \leqslant 1$. Comme v et u sont des entiers tels que $u < v$, il est nécessaire d'avoir $v = u + 1$.
Si $v = u + 1$, en prenant $a = v$ et $b = -u$, on a bien $f(u) = v$ et $f(v) = u$.
Deux entiers sont échangeables si et seulement si ces entiers sont consécutifs.

SOLUTION 4 (de F. Lo Jacomo)

(analogue à la solution 3, mais différemment présentée.)

1) Pour $a = 3$ et $b = -2$, $3 - \sqrt{3-2} = 2$ et $3 - \sqrt{2-2} = 3$.

2) Non : si $a - \sqrt{u+b} = v$ et $a - \sqrt{v+b} = u$, en soustrayant :
$u - v = \sqrt{u+b} - \sqrt{v+b}$, donc en multipliant par $\sqrt{u+b} + \sqrt{v+b}$:
$(u-v)\left(\sqrt{u+b} + \sqrt{v+b}\right) = u - v$, ce qui équivaut à :
soit $u = v$, soit $\sqrt{u+b} + \sqrt{v+b} = 1$.
Si $u = 4$ et $v = 7$, on doit avoir $b \geqslant -4$ (sinon $\sqrt{u+b}$ ne serait pas définie), donc $\sqrt{v+b} \geqslant \sqrt{3} > 1$.

3) Si $u \neq v$, la condition : $\sqrt{u+b}+\sqrt{v+b} = 1$ nécessite que $u+b$ et $v+b$ soient tous deux compris entre 0 et 1. Si u et v sont deux entiers distincts, $u+b$ et $v+b$ diffèrent d'un entier, donc au moins de 1, et la seule possibilité est que $u + b = 1$ et $v + b = 0$ ou inversement. Deux entiers ne peuvent être échangeables que s'ils sont égaux ou consécutifs. Réciproquement, si $u = v$, pour tout $b \geqslant -u$, il suffit de prendre $a = u+\sqrt{u+b}$. Si $u = v+1$, il faut prendre $b = -v$ (pour avoir $u + b = 1$ et $v + b = 0$), donc $a = u$, et il est clair que ces valeurs conviennent.

SOLUTION 5 (de l'équipe académique de Besançon)

1) Avec un peu de chance, on propose : $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$ qui vérifie bien $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.

Si l'on n'a pas cette intuition, on résout le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{2+b} = 3 & (1) \\ a - \sqrt{3+b} = 2 & (2) \end{cases}$$

Par soustraction $(1) - (2)$, il vient $\sqrt{3+b} - \sqrt{2+b} = 1$
soit $\sqrt{7+b} = \sqrt{4+b} + 3$,
soit, en élevant au carré $3 + b = 2 + b + 1 + 2\sqrt{2+b}$,
soit$2\sqrt{2+b} = 0$, soit $b = -2$.
Il vient, en substituant dans (1) : $a = 3$.
On obtient donc $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$.
Il est alors impératif de vérifier qu'on a bien $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$. Beaucoup d'élèves oublient de le faire et n'ont ainsi rien démontré.

2) On résout de même le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{4+b} = 7 & (1) \\ a - \sqrt{7+b} = 4 & (2) \end{cases}$$

Par soustraction $(1) - (2)$, il vient $\sqrt{7+b} - \sqrt{4+b} = 3$.
soit $\sqrt{7+b} = \sqrt{4+b} + 3$,

soit en élevant au carré $7+b=4+b+9+6\sqrt{4+b}$,
soit $6\sqrt{4+b}=-6$, ce qui est évidemment impossible.
4 et 7 ne sont donc pas échangeables, ce que confirme la question 3.

3) (plus dure)
On recherche u et v entiers (avec par exemple $u<v$) et a et b réels tels que

$$\begin{cases} a-\sqrt{u+b}=v & (1)\\ a-\sqrt{v+b}=u & (2)\end{cases}$$

Analyse :
Par soustraction (1) − (2), il vient $\sqrt{v+b}-\sqrt{u+b}=v-u$ (3)
Posons $x=u+b$ et $d=v-u$; par hypothèse $d\in\mathbb{N}^*$.
L'équation (3) devient alors $\sqrt{x+d}-\sqrt{x}=d$ ou encore $\sqrt{x+d}=\sqrt{x}+d$.
On en déduit, en élevant au carré, $x+d=x+d^2+2d\sqrt{x}$ soit $d=d^2+2d\sqrt{x}$ soit encore, en divisant par d ($d\in\mathbb{N}^*$) : $1-d=2\sqrt{x}$.
Comme $\sqrt{x}\geqslant 0$, il vient $d\geqslant 1$ et comme $d\in\mathbb{N}^*$, finalement : $d=1$ et $x=0$.
Ainsi $v=u+1$ donc $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont consécutifs}}$.
De plus, $b=-u$ et en substituant dans (1), $a=v=u+1$.

Synthèse
Si u et v sont consécutifs, avec $v=u+1$, si nous prenons la fonction définie par $f(x)=a-\sqrt{x+b}$ où $a=u+1=v$ et $b=-u$,
soit encore $f(x)=u+1-\sqrt{x-u}$,
on vérifie que $\begin{cases} f(u)=u+1-\sqrt{u-u}=u+1=v\\ f(v)=u+1-\sqrt{v-u}=u+1-1=u\end{cases}$
donc u et v sont échangeables.

Conclusion

Deux entiers naturels u et v sont échangeables si et seulement s'ils sont consécutifs.

SOLUTION 6 (de l'équipe académique de Dijon)

1) 2 et 3 sont échangeables s'il existe au moins un couple (a, b) de réels tels que $\begin{cases} f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$ ce système équivaut au système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{2+b} = 3 \\ a - \sqrt{3+b} = 2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a - 3 = \sqrt{2+b} \\ a - 2 = \sqrt{3+b} \end{cases}$$

. En élevant au carré, on obtienr le système équivalent :

$$\begin{cases} a \geqslant 3 \\ 2 + b = a^2 - 6ab + 9 \\ 3 + b = a^2 - 4ab + 4 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

La fonction cherchée est unique et est définie par $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$.

2) 4 et 7 ne sont pas échangeables car les mêmes calculs conduisent aux deux résultats contradictoires : $a \geqslant 7$ et $a = 6$.

3) Supposons donc u et v échangeables et posons par exemple $u > v$, donc, puisqu'il s'agit d'entiers, $u \geqslant v + 1$. La double égalité conduit aux systèmes successifs suivants :

$$\begin{cases} a - v = \sqrt{u+b} \\ a - u = \sqrt{v+b} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a \geqslant u \\ u + b = a^2 - 2av + v^2 \\ v + b = a^2 - 2au + u^2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a \geqslant u \\ 2a - (u+v) = 1 \\ v + b = (a-u)^2 \end{cases}$$

On obtient donc finalement $\begin{cases} a = \dfrac{1+u+v}{2} \\ b = (a-u)^2 - v \end{cases}$ sous réserve que l'on ait à la fois $a \geqslant u$ soit $u \leqslant v + 1$ et, compte tenu des hypothèses, $u \geqslant v + 1$.

a et b existent donc à condition que $u = v + 1$, c'est-à-dire si u et v sont consécutifs. C'était le cas pour 2 et 3, mais pas pour 4 et 7.

La condition est, par ailleurs, suffisante.

Donc on peut énoncer que u et v sont échangeables si et seulement s'ils sont consécutifs, et dans ce cas, la fonction est unique.

SOLUTION 7 (de l'équipe de Toulouse)

(Cette solution reprend des méthodes déjà données ci-dessus, mais en y ajoutant de belles considérations).

1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.

On dispose d'une définition, on l'utilise : 2 et 3 sont échangeables si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\Sigma \begin{cases} a - \sqrt{b+2} = 3 \\ a - \sqrt{b+3} = 2 \end{cases}$$

Il s'agit de manipuler ce système pour trouver des réels *candidats* a et b. Ceci peut se faire de multiples façons.
La première chose à noter est que le fait d'écrire $\sqrt{b+2}$ présuppose que $b \geqslant -2$; de même, $b \geqslant -3$ et donc $b \geqslant -2$.
Autre point : l'égalité $a - \sqrt{b+2} = 3$ implique que $a \geqslant 3$ et la deuxième que $a \geqslant 2$ donc $a \geqslant 3$.
On cherche donc $a \geqslant 3$ et $b \geqslant -2$ tels que Σ soit vérifié. On peut soit raisonner par *équivalence* pour trouver *toutes* les solutions, soit raisonner par *implications* pour trouver les seuls candidats possibles, soit enfin chercher par *essais-erreurs* puisque la question n'est pas de résoudre Σ, mais de montrer que 2 et 3 sont échangeables. Or, le premier essai que l'on peut faire est $a = 3$ et $b = -2$ qui, justement, convient ! Donc $\boxed{\text{2 et 3 sont échangeables.}}$
On trouvera en fin d'excice une résolution algébrique de Σ qui s'applique aussi à ce cas particulier.

2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?

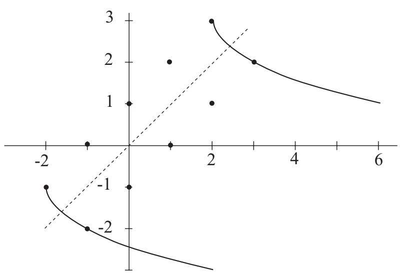
Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\begin{cases} a - \sqrt{b+4} = 7 \\ a - \sqrt{b+7} = 4 \end{cases}$.
Il est certes possible de manipuler ce système algébriquement pour faire apparaître une contradiction.

Une idée plus élégante est la suivante : en passant de $b+4$ à $b+7$, on augmente de 3 ; comme la racine carrée $\sqrt{x}$ augmente *strictement* moins vite que x pour les x *strictement* plus grands que 1, en passant de $\sqrt{b+4}$ à $\sqrt{b+7}$, on augmente *strictement* de moins que 3, donc la différence avec a ne peut pas augmenter de 3.

Formalisons un peu cela : le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ montre que si $0 < y < z$ avec $z > 1$ alors la pente de la sécante joignant $(y, \sqrt{y})$ à $(z, \sqrt{z})$ est strictement inférieure à 1 (ce qui se démontre aussi aisément par le calcul).
On a donc $\sqrt{b+7} - \sqrt{b+4} < (b+7) - (b+4) = 3$
et donc $\left((a - \sqrt{b+4}) - (a - \sqrt{b+7})\right) < 3$ et ne peut être égal à 3.
Le système Σ est donc incompatible $\boxed{\text{4 et 7 ne sont pas échangeables.}}$

3) A quelle condition deux *entiers* u et v sont-ils échangeables ?
On peut reprendre le raisonnement précédent ; si u et v sont deux entiers échangeables, supposons par exemple que $u > v$; la différence $u - v$ est alors au moins 1. Si elle est strictement plus grande, donc au moins 2, u est donc strictement plus grand que 1 et la différence $\sqrt{b+u} - \sqrt{b+v}$ est strictement inférieure à $u - v$ et ne peut donc lui être égale. Il est donc nécessaire que $u - v = 1$.

Démontrons que cette condition est aussi suffisante, c'est-à-dire démontrons que, si u est un entier relatif, alors u et $u+1$ sont échangeables. Pour cela, utilisons la question 1 ; on sait que 2 et 3 sont échangeables avec $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$.



En plaçant ces informations sur un graphique, il apparaît clairement qu'en translatant la courbe (qui est, soit dit en passant, une demi-parabole) parallèlement à la première bissectrice, on peut l'amener à passer par n'importe quel couple de points $(u, u+1)$ et $(u+1, u)$. Or translater la courbe d'équation $y = 3 - \sqrt{x-2}$, c'est ajouter une constante à y et une constante à x. Ce sera donc toujours une courbe d'équation $y = a - \sqrt{b+x}$. De façon précise, $f(x) = u + 1 - \sqrt{x-u}$ échange bien les couples.

Essayons d'étudier le problème général : quels sont les couples de réels (distincts) échangeables ?

u et v sont échangeables si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\begin{cases} a - \sqrt{b+u} = v \\ a - \sqrt{b+v} = u \end{cases} .$$

Procédons par analyse-synthèse.
Supposons que a et b existent.
On en déduit par différence que $\sqrt{b+v} - \sqrt{b+u} = v - u$, puis en multipliant par $\sqrt{b+v} + \sqrt{b+u}$, que $v - u = (v-u)\left(\sqrt{b+v} + \sqrt{b+u}\right)$ et, comme $u \neq v$, on a donc $\sqrt{b+v} + \sqrt{b+u} = 1$. En additionnant les deux équations du système, on a alors $2a - 1 = u + v$ et donc $a = \dfrac{u+v+1}{2}$, puis $b + u = (a-v)^2$ et donc $b = \dfrac{1}{4}(u^2 + v^2 - 2uv - 2u - 2v + 1)$.

Synthèse :
On a besoin de s'assurer que $u \leqslant a$ et $u \leqslant a$; ceci équivaut à $v \leqslant u + 1$ et $u \leqslant v + 1$ ou encore $|u - v| \leqslant 1$.
Ensuite, on a aussi besoin que $b + u \geqslant 0$ et $b + v \geqslant 0$; or, $b + u = \left(\dfrac{u-v+1}{2}\right)^2$ et de même $b + v = \left(\dfrac{v-u+1}{2}\right)^2$. La suite est simple :

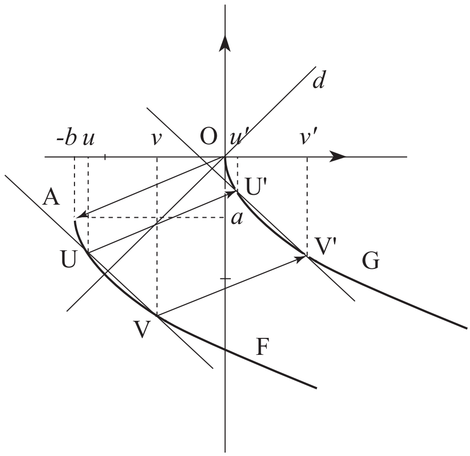
$$a - \sqrt{b+u} = \frac{u+v+1}{2} - \left|\frac{u-v+1}{2}\right| = \frac{u+v+1}{2} - \frac{u-v+1}{2} = v$$

Vérification semblable pour $f(v) = u$.

Bilan :
Tous les couples (u, v) de réels distincts de la bande $|u - v| \leqslant 1$ sont échangeables.

SOLUTION 8 par Jean-Raymond Delahaye - lycée Alain Borne - Montélimar

(*Cette résolution graphique exploite des idées déjà surgies dans la solution 7*).



On supposera $u < v$.
On se place dans un repère orthonormal. Notons F la courbe de f et G celle de la fonction qui à x associe $-\sqrt{x}$.

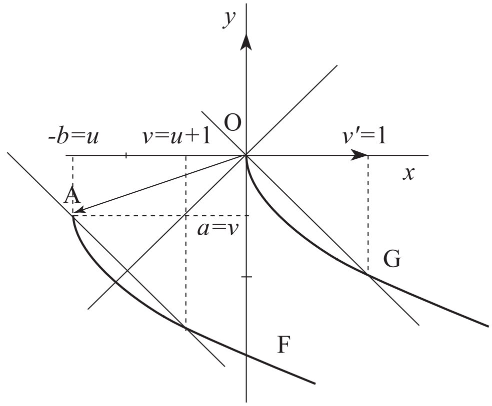
La relation $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ se traduit par le fait que F est l'image de G dans la translation $\mathcal{T}$ de vecteur $-b\,\overrightarrow{i} + a\,\overrightarrow{j}$. Dire que u et v sont échangeables revient à dire que les points U et V de F d'abscisses respectives u et v, sont symétriques par rapport à la droite (d) d'équation $y = x$.

Soient U'=$\mathcal{T}^{-1}$(U) et V'= $\mathcal{T}^{-1}$(V).
Dire que U et V sont échangeables revient à dire que U' et V' qui sont des points de G, appartiennent à la même droite (d') perpendiculaire à (d).
Les abscisses u' et v' de U et V sont telles que $u' = u + b$ et $v' = v + b$.

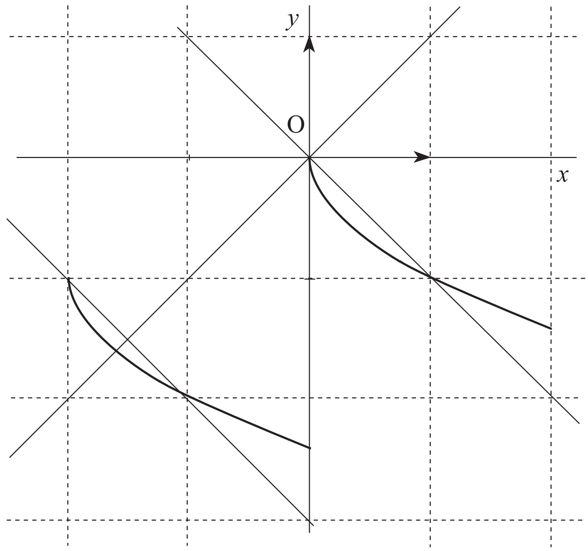
Il est évident graphiquement que la valeur maximale de $v' - u'$ est 1 et qu'elle est obtenue pour $u' = 0$ et $v' = 1$.
Or $v - u = v' - u'$, donc l'écart maximal entre u et v est 1.

Dans ce cas, les points U et V sont les images par $\mathcal{T}$ des points de coordonnées 0 et 1 de G.

On en déduit donc que $-b = u$ et $a = v$, soit $a = v$ et $b = -u$.



Si on suppose que u et v sont deux entiers distincts, alors $v = u + 1$, u et v sont donc deux entiers consécutifs. La situation est illustrée ci-dessous dans le cas $u = -2$ et $v = -1$.



SOLUTION 9 (Eléments, par l'équipe de Versailles)

Une condition nécessaire tirée de $f(u) = v$ et $f(v) = u$ s'exprime ainsi : $v - \sqrt{b+v} = u - \sqrt{b+u}$. Elle donne l'idée que les réels u et v ont la même image par la fonction f_b : $\begin{pmatrix} [-b, +\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \sqrt{b+x} \end{pmatrix}$

L'étude des fonctions f_b conduit au résultat suivant : f_b est décroissante sur l'intervalle $\left[-b, -b+\dfrac{1}{4}\right[$, croissante sur $\left[-b+\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$. En $-b$ et $-b+1$, elle prend la même valeur $-b$.
Si deux réels ont la même image par f_b, ils sont éléments de [-b,-b+1].
Et si deux entiers ont la même image, **ce sont** $-b$ et $-b+1\ldots$

COMMENTAIRES

• *L'exercice a été généralement jugé « bien construit, concis et sobre tout en proposant une saine progression des difficultés des trois questions »* (Citation de « Nantes »).
• De très nombreuses académies disent que **ce exercice a été le mieux réussi des quatre proposés** ou vient immédiatement en second rang.
• *Il y a, bien sûr, des regrets :*

Poitiers
Une majorité de candidats montre qu'on peut changer 2 et 3, mais très peu prouvent véritablement qu'on ne peut pas échanger 4 et 7. (Idem pour Strasbourg)
Quelques candidats comprennent qu'on peut échanger n et $n+1$, mais aucun ne parvient à montrer que c'est le seul type d'échange possible.

suite pour Strasbourg
La réponse à la troisième question a souvent été devinée mais rarement justifiée. Cet exercice laisse à penser que les questions d'existence ou non-existence sont difficiles pour les élèves.

Toulouse
Exercice traité par des approches intuitives ou par une résolution algébrique. La première question est fréquemment résolue ; c'est moins le cas de la deuxième et surtout de la troisième où nombre de candidats conjecturent mais ne prouvent pas ou prouvent partiellement...

de Michel Regnault, pour Caen
Un exercice intéressant dont les trois questions sont bien graduées en difficulté et que l'on voit, en général, traduit par l'étude de deux équations irrationnelles à deux inconnues réelles a et b.
La démarche pour montrer qu'il existe au moins une solution est plus habituelle que celle qui permet d'établir qu'il n'y en a aucune, mais

le minimum de rigueur nécessaire dans les développements de calculs n'est pas souvent présent. Il est vrai que la pratique de la résolution d'une équation contenant un radical n'est plus étudiée de façon systématique et seulement abordée comme application ou illustration de la non-équivalence entre l'égalité de deux nombres et celle de leurs carrés, mais cette dernière propriété n'a, semble-t-il, pas vraiment marqué l'esprit de nos élèves. C'est ainsi qu'après une élévation au carré et la différence entre les deux nouvelles équations, certains, sans se soucier de faire une vérification, ont pu conclure que 4 et 7 sont échangeables en prenant $a = 6$ et $b = -3$.
Pour ne pas être trop négatif, il faut signaler qu'une démarche et une conclusion correctes pour 1° et 2° sont présentes dans plusieurs copies et que, plus exceptionnellement, la vérification que deux entiers consécutifs sont échangeables est faite, et même, mais une seule fois, la nécessité de cette condition est établie.

Besançon
La question 3 a été peu abordée. Beaucoup d'élèves ont "intuité" le résultat, un seul l'a à peu près démontré.
Dans la question 1, la plupart des élèves ont trouvé f par analyse, mais beaucoup ont oublié la synthèse, ou *ont vérifié après* avoir conclu que 2 et 3 sont échangeables et non avant. Ils ne distinguent donc pas encore une vérification impérative (synthèse) d'une simple vérification calculatoire (c'est-à-dire pour se rassurer). Cette erreur a provoqué ainsi parfois une erreur de conclusion en question 2.

Montpellier
...La gestion de l'existence du couple (a, b) pose parfois problème. Les candidats qui « devinent » sont avantagés car ceux qui résolvent le système ne vérifient pas toujours que le couple trouvé convient bien.

Amiens
Beaucoup de candidats n'arrivent pas à manipuler correctement un radical dans le premier exercice. Il semble que le réflexe d'isoler le radical de façon à le faire disparaître en élevant ensuite au carré est inconnu de la plupart des élèves.

Terminons par une synthèse, plutôt optimiste, de Lyon
« Cet exercice a été beaucoup abordé et assez bien réussi, du moinspour les deux premières questions. On remarque dans cet exercice beaucoup

d'erreurs concernant les conditions nécessaires, les conditions suffisantes, les réciproques ou les vérifications... mais on trouve aussi d'excellentes idées »

PROLONGEMENT

(Communiqué par Dominique Roux)
L'exercice proposé se prolongeait ainsi, dans la version initiale :

On définit maintenant pour chaque triplet de réels (a, b, c), avec $c > 0$, la fonction g par :

$$g(x) = a - c\sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *coupables* s'il existe au moins une fonction g de ce type réalisant à la fois $g(u) = v$ et $g(v) = u$.

4) Montrer que 2004 et 204 sont coupables. Plus précisément, donner une fonction de type g telle que $g(2004) = 204$ et $g(204) = 2004$, ayant le plus petit c possible, puis deux autres ayant des paramètres a, b, c tous entiers.

5) Trouver tous les coupables ! (parmi les paires de réels).

SOLUTION

4) Suivant le même raisonnement [1], on prouve que g échange 2004 et 204 si et seulement si :

$$\left\{a \geqslant 2004,\ a = \frac{1}{2}c^2 + 1104,\ b = \frac{1}{c^2}(a-204)^2 - 2004\right\}$$

Le plus petit c envisageable est donc, puisqu'il doit être > 0,

$$c = \sqrt{2(2004-1104)} = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$$

. On a alors $g(x) = 2004 - 30\sqrt{2}\,\sqrt{x-204}$.

On veut maintenant des paramètres entiers ; d'après nos formules, a est entier si et seulement si $\dfrac{c^2}{2}$ est entier, si et seulement si c est pair. Quant à b, il suffit que $\dfrac{a-204}{c}$ soit entier pour qu'il le soit aussi.

[1] voir la SOLUTION 1

Imposons cette condition.
Considérons $c = 2p$; la condition $a \geqslant 2004$ devient $p^2 \geqslant 450$ soit $p \geqslant 22$ lorsque p est entier. Il faut s'arranger pour avoir $a - 204 = k \times 2p$, k entier, ce qui s'écrit encore vu les formules : $2p^2 + 1104 - 204 = k \times 2p$, soit $p(k - p) = 450$.
L'entier p est nécessairement l'un des diviseurs de $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$, plus grand que 22.
Pour $p = 30$, on trouve $c = 60$, $a = 2904$, $b = 21$; on vérifie facilement que la fonction g définie par $g(x) = 2904 - 60\sqrt{x + 21}$ envoie 2004 sur 204 et 204 sur 2004.
On peut choisir par exemple

$p = 45$ qui conduit à $g(x) = 5154 - 90\sqrt{x + 1021}$, ou

$p = 50$, qui correspond à $g(x) = 6104 - 100\sqrt{x + 1477}$

(ces fonctions conviennent elles aussi).

Remarque : la condition « c divise $a - 204$ » est en fait nécessaire, et l'on peut alors lister toutes les solutions g avec des paramètres entiers. Il n'y a que 9 valeurs possibles pour c.

5) Dans le cas général, où l'on souhaite coupler deux réels, on procède exactement comme au début du (4) ; il apparaît une condition du type « $c^2 \geqslant$ un certain nombre », et deux formules donnant a et b en fonction de c. Il y a donc toujours des solutions : on choisit c suffisamment grand et on considère les réels a et b donnés par ces formules. Noter qu'il y a même une infinité de solutions.
Moralité : tous coupables !

N.B. *L'exercice et son complément sont dus à M. J.F. Mallordy, de Clermont-Ferrand, le tout étant, à ma connaissance, inédit.*