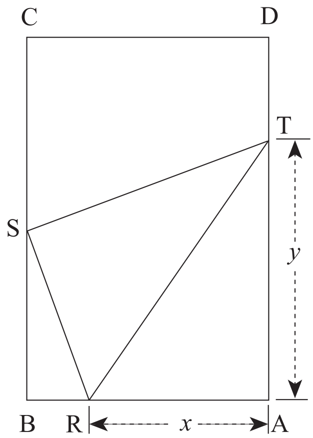
DEUXIÈME SUJET NATIONAL

ÉNONCÉ

Soit ABCD une feuille rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$. Soit R un point de [AB] (bord inférieur de la feuille) et T un point de [AD] (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment [RT] et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir la figure ci-contre.
Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment [BC] (bord gauche de la feuille).
On pose $AR = x$ et $AT = y$.



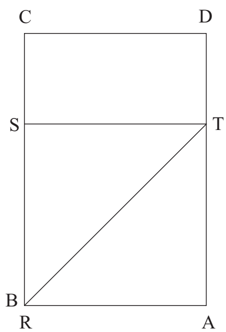
1°) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.

2°) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur [BC].

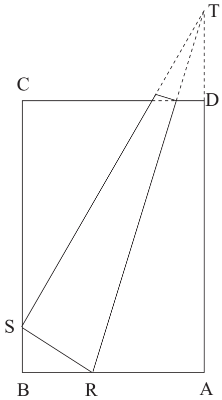
3°) Trouver la valeur de x pour laquelle la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?

SOLUTION (nationale)

1°) La valeur maximale de x est atteinte lorsque R est en B (cas de la figure ci-dessous).

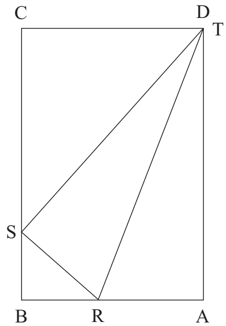


Alors $x = AB = 4$.



Le point A, après repliement de la feuille, ne peut venir en un point S de [BC] que si $RA \geqslant RB$, c'est-à-dire $x \geqslant \frac{a}{2}$. ($a = 4$).
Mais pour les plus petites valeurs de x supérieures à $\frac{a}{2}$, le point T, intersection de la droite portant le pli et de la droite (AD) sera en dehors du segment [AD] (cas de la figure ci-contre), la partie repliée étant alors un trapèze.

La plus petite valeur de x respectant les conditions du problème sera donc obtenue lorsque T sera en D (cas de la figure ci-contre).
Alors $DS = DA = 6$.
Comme $CD = 4$, $CS = \sqrt{20}$ d'après Pythagore.



Donc $BS = 6 - \sqrt{20}$. Or $BR = 4 - x$
d'où $RS^2 = AR^2 = x^2 = \left(6 - \sqrt{20}\right)^2 + (4 - x)^2$ d'après Pythagore, soit $\left(6 - \sqrt{20}\right)^2 + 16 - 8x = 0$ ou encore $8x = 72 - 12\sqrt{20}$ et enfin $x = 9 - \frac{3}{2}\sqrt{20}$.

En conclusion, $x \in I$ où $I = \left[9 - \frac{3}{2}\sqrt{20}\ ;\ 4\right]$

2°) Soit H le projeté orthogonal de S sur (AD].
$RS = AR = x,\ BR = 4 - x$