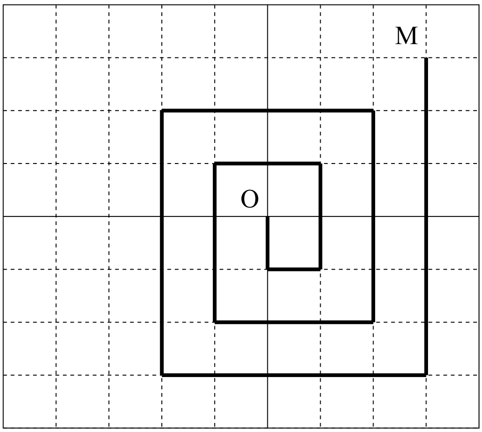
# SUJETS NATIONAUX

## Exercice n° 1

### Enoncé

#### La « spirale »

Le plan muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé de droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage, on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous. Pour tout point M à coordonnées entières, on note $\ell(M)$ la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O au point M.



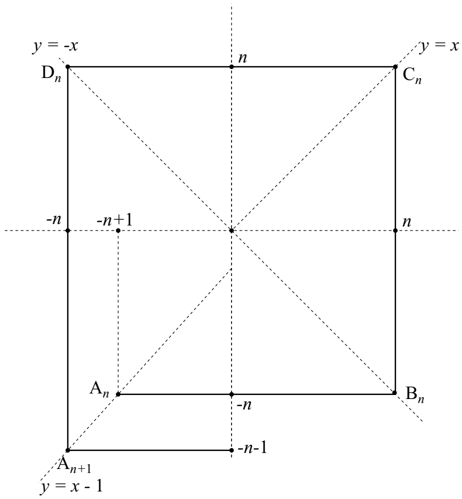

1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que $OA = 5$.
   Déterminer les valeurs possibles de $\ell(A)$.
2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer $\ell(B)$.
3) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\ell(C) = 2006$.
4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel $n$ non nul, $1+2+3+\cdots+n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.

## Solution 1

Commençons par des considérations générales.




Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites $\Delta_1$, $\Delta_2$ et $\Delta_3$ dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y=x-1$ $(\Delta_1)$, $y=-x$ $(\Delta_2)$ et $y=x$ $(\Delta_3)$.

Notons :
$A_n$ le point de $\Delta_1$ d'abscisse $-n$ : il a pour coordonnées : $(-n+1,-n)$.
$B_n$ le point de $\Delta_2$ d'abscisse $-n$ : il a pour coordonnées : $(n,-n)$.
$C_n$ le point de $\Delta_3$ d'abscisse $n$ : il a pour coordonnées $(n,n)$.
$\Delta_n$ le point de $\Delta_2$ d'abscisse $n$ : il pour coordonnées : $(-n,n)$.
La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n\in\mathbf{N}^*$ des segments

$$[D_{n-1}A_n]\,,\ [A_nB_n]\,,\ [B_nC_n]\ \text{ et }\ [C_nD_n]$$

de longueurs respectives $2n-1$, $2n-1$, $2n$ et $2n$.
Le point $O$ peut être considéré comme le point $D_0$.
On conjecture facilement que les points $A_n$ et $C_n$ sont tels que :

$$\boxed{\ell(A_n)=(2n-1)^2} \text{ et } \boxed{\ell(C_n)=(2n)^2}$$

Démontrons-le :
$\ell(A_n)=OA_1+A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1A_1+\cdots+B_{n-1}C_{n-1}+C_{n-1}D_{n-1}+D_{n-1}A_n$

$$\begin{aligned}&= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + \cdots + (2n-2) + (2n-2) + (2n-1)\\ &= 2.\left((1 + 2 + 3 + \cdots + (2n-2) + (2n-1)\right)\\ &= 2.\frac{(2n-1)(2n-1)}{2} + (2n-1) = (2n-2)(2n-1) + (2n-1)\\ &= (2n-1)\left((2n-2)+1\right) = (2n-1)^2\end{aligned}$$

et

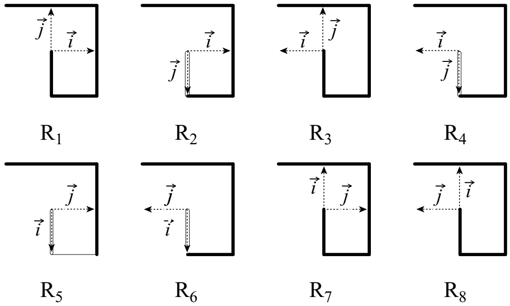
$\ell(C_n) = \ell(A_n) + A_nB_n + B_nC_n = (2n-1)^2 + (2n-1) + 2n = 4n^2 = (2n)^2$.

1. Il existe deux points $A$ de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$, l'un d'abscisse 5, l'autre d'abscisse -5.
   1^er^ cas : $A(5.0)$
   Ce point est sur le segment $[B_5C_5]$ ; en effet, on a $B_5(5,-5)$ et $C_5(5,5)$ avec $AC_5 = 5$.
   Ainsi $\ell(A) = \ell(C_5) - 5 = 10^2 - 5 = \boxed{95}$
   2^ème^ cas : $A'(-5,0)$
   Ce point est sur le segment $[D_5A_6]$ $(D_5(-5,5), A_6(-5,-6))$ avec $A'A_6 = 6$.
   Ainsi $\ell(A') = \ell(A_6) - 6 = 11^2 - 6 = \boxed{115}$.
2. $B(2005, 2006)$ est sur le segment $[C_{2006}D_{2006}]$ ;
   en effet, on a $C_{2006}(2006, 2006)$ et $D_5(-2006, 2006)$ avec $C_{2006}B = 1$.
   Ainsi $\ell(B) = \ell(C_{2006}) + 1 = 4\ 012^2 + 1 = \boxed{16\ 096\ 145}$.
3. On cherche ici le point $C$ tel que $\ell(C) = 2006$.
   Or, la suite des nombres $\ell(O) = 0$, $\ell(A_1) = 1$, $\ell(C_1) = 4$, $\ell(A_2) = 9$, $\ell(C_2) = 16, \ldots \ell(A_n) = (2n-1)^2$, $\ell(C_n) = (2n)^2$ est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).
   Il suffit donc d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :
   $$\ell(C_{22}) = 44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2 = \ell(A_{23}).$$
   De plus, $C_{22}D_{22} = 44$ donc
   $$\ell(D_{22}) = 1936 + 44 = 1980 < 2006 < 2025 = 45^2 = \ell(A_{23}).$$
   donc $C \in [D_{22}A_{23}]$.
   Enfin : $2006 - 1980 = 26$, donc $\begin{cases} x_C = -22 = x_{D_{22}} = x_{A_{23}} \\ w_C = x_{D_{22}} - 26 = 22 - 26 = -4 \end{cases}$
   Donc $C$ a pour coordonnées $\boxed{\text{(-22,-4)}}$

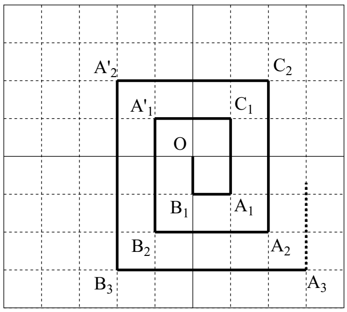
## Solution 2 proposée par l'académie de Caen.

Le texte ne précise pas laquelle des deux droites passant par $O$ doit être choisie comme axe des abscisses ; il existe donc deux possibilités. Le texte ne précise pas non plus le sens des vecteurs de base ; il y a donc deux possibilités pour chacun, ce qui donne huit repères $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Dans les figures ci-dessous, la spirale est dessinée en noir épais et les vecteurs de base en traits fins discontinus.




On peut penser que l'orientation envisagée par l'auteur du texte est l'orientation « classique » du repère (cas du repère $R_1$).
Nous utiliserons ici le repère $R_5$ et en déduirons ensuite les résultats dans tous les autres cas.
Remarque : une rotation de la feuille d'un quart de tour dans le sens direct permet, dans ce cas, de retrouver une position « rassurante » du repère.
Appelons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$
$A_n$ le point de coordonnées $(n, n)$, $A'_n$ le point de coordonnées $(-n, -n)$
$C_n$ le point de coordonnées $(-n\ ; n)$, $B_n$ le point de coordonnées $(n, -n+1)$.




La spirale est formée des segments $[OB_1]$, $[B_1A_1]$, $[A_1C_1]$, $[C_1A'_1]$,
$[A'_1B_2]$, $[B_2A_2]$, $[A_2C_2]$, $[C_2A'_2], \ldots$
$[A'_{n-1}B_n]$, $[B_nA_n]$, $[A_nC_n]$, $[C_nA'_n], \ldots$
Les segments $[OB_1]$ et $[B_1A_1]$ ont pour longueur 1
les segments $[A_1C_1]$ et $[C_1A'_1]$ ont pour longueur 2,
les segments $[A'_1B_2]$ et $[B_2A_2]$ ont pour longueur 3,
les segments $[A_2C_2]$ et $[C_2A'_2]$ ont pour longueur 4.

$A'_{n-1}$ a pour coordonnées $(-(n-1), -(n-1))$, $B_n$ a pour coordonnées $(n, -(n-1))$.
Le segment $[A'_{n-1}B_n]$ a donc pour longueur $n - (-(n-1)) = 2n-1$ puisque $A'_{n-1}$ et $B_n$ ont même ordonnée.
$A_n$ a pour coordonnées $(n, n)$, le segment $[B_nA_n]$ a donc pour longueur $n - (-(n-1)) = 2n-1$ puisque $B_n$ et $A_n$ ont même abscisse.
$C_n$ ayant pour coordonnées $(-n, n)$, le segment $[A_nC_n]$ a pour longueur $n - (-n) = 2n$ puisque $A_n$ et $C_n$ ont même ordonnée.
$A'_n$ ayant pour coordonnées $(-n, -n)$, le segment $[C_nA'_n]$ a pour longueur

$n-(-n)=2n$ puisque $C_n$ et $A'_n$ ont même abscisse.

En conséquence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
L(A_n) &= OB_1+B_1A_1+A_1C_1+C_1A'_1+A'_1B_2+B_2A_2+\cdots\\
&\quad \cdots+A_{n-1}C_{n-1}+C_{n-1}A'_{n-1}+A'_{n-1}B_n+B_nA_n\\
&= 1+1+2+2+3+3+\cdots\\
&\quad \cdots+2(n-1)+2(n-1)+2n-1+2n-1\\
&= 2(1+2+3+\cdots+2n-1)=2\sum_{i=1}^{2n-1} i = 2\,\frac{(2n-1)2n}{2}\\
&= 2n(2n-1)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
L(A'_n) &= L(A_n)+A_nC_n+C_nA'(n)=2n(2n-1)+2n+2n\\
&= 2n(2n-1+2)\\
&= 2n(2n+1)
\end{aligned}$$

Le segment $[A'_{n-1}B_n]$ d'extrémités $A'_{n-1}$ de coordonnées $(-(n-1),$ $-(n-1))$ et $B_n$ de coordonnées $(n,-(n-1))$ est formé de tous les points d'ordonnée $-(n-1)$ dont l'abscisse est comprise entre $-(n-1)$ et $n$. Tous ces points sont des points de coordonnées $(x,y)$ telles que $y<0$ et $y \leqslant x \leqslant -y+1$, ce qui peut encore s'écrire :

$y<0$ et $|x| \leqslant -y$ ou $x=-y+1$ (condition 1).

Le segment$[B_nA_n]$ d'extrémités $B_n$ de coordonnées $[n,-(n-1)]$ et $A_n$ de coordonnées $(n,n)$ est formé de tous les points d'abscisse $n$ dont l'ordonnée est comprise entre $-(n-1)$ et $n$. Tous ces points sont des points de coordonnées $(x,y)$ telles que $x>0$ et $-x \leqslant x-1$ ou $y=x$, ce qui peut encore s'écrire :

$x>0$ et $|y| \leqslant x-1$ ou $y=x$ (condition 2).

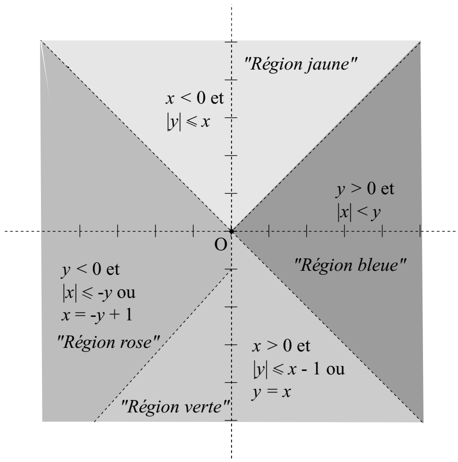
Le segment $[A_nC_n]$ d'extrémités $A_n$ de coordonnées $(n,n)$ et $C_n$ de coordonnées $(-n,n)$ est formé de tous les points d'ordonnée $n$ dont l'abscisse est comprise entre $-n$ et $n$. Tous ces points sont des points de coordonnées $(x,y)$ telles que $y>0$ et $-y \leqslant x \leqslant y$, ce qui peut s'écrire :

$y>0$ et $|x| \leqslant y$ (condition 3).

Le segment $[C_nA'_n]$ d'extrémités $C_n$ de coordonnées $(-n\,;n)$ et $A'_n$ de coordonnées $(-n,-n)$ est formé de tous les points d'abscisse $-n$ dont l'ordonnée est comprise entre $-n$ et $n$. Tous ces points sont des points de coordonnées $(x,y)$ telles que $x<0$ et $-x \leqslant y \leqslant x$, ce qui peut encore s'écrire

$x<0$ et $|y|<x$ (condition 4).

Remarque : les quatre conditions mises en évidence ci-dessus correspondent à un partage du plan en quatre parties disjointes par des demi-droites comme le montre la figure ci-dessous.




Ces considérations vont permettre maintenant de répondre très rapidement aux questions de l'exercice. Les réponses seront d'abord données dans le repère choisi puis, en fin de corrigé, dans tous les repères possibles.

1. Un point de l'axe des abscisses tel que $OA = 5$ a pour coordonnées, ou bien (5,0) ou bien (−5,0).
   - si $A$ a pour coordonnées (5,0), comme $5 > 0$ et $|0| \leqslant 5$,
     $A \in [B_5A_5]$.
     Or $L(A_5) = 10 \times 9 = 90$,
     donc $L(A) = L(A_5) - AA_5 = 90 - 5 = 85$.
   - si $A$ a pour coordonnées (−5,0), comme $-5 < 0$ et $|0| \leqslant 5$,
     $A \in [C_5A'_5]$.
     Or $L(A'_5) = 10 \times 11 = 110$,
     donc $L(A) = L(A'_5) - AA'_5 = 110 - 5 = 105$.
2. $B$ a pour coordonnées (2005,2006).
   Comme $2006 > 0$ et $|2005| \leqslant 2006$,
   $B \in [A_{2006}C_{2006}]$.
   $L(A_{2006} = 2 \times 2006(2 \times 2006 - 1) = 16\ 092\ 132$,
   donc $L(B) = L(A_{2006}) + A_{2006}B = 16\ 092\ 132 + 1 = 16\ 092\ 133$.

3. Cherchons la plus grande valeur de $n$ telle que $L(A_n) < L(C)$.
   Cette inégalité équivaut à $2n(2n-1) < 2006$ ou à $2n^2 - n - 1003 < 0$ (après division des deux membres par 2).
   Le trinôme $2n^2 - n - 1003$ a pour racines $n = \dfrac{1 \pm 5\sqrt{321}}{4}$.
   $n$ devant être positif, l'inégalité sera vérifiée si $n < \dfrac{1 + 5\sqrt{321}}{4}$.
   Or $22,6 < \dfrac{1 + 5\sqrt{321}}{4} < 22,7$. Donc la plus grande valeur de $n$ cherchée est 22.

$L(A_{22} = 2 \times 22(2 \times 22 - 1) = 1892$ et $A_{22}C_{22} = 2 \times 22 = 44$. Donc $L(C_{22}) = L(A_{22}) + 44 = 1892 + 44 = 1936$ qui est inférieur à 2006 ; $C$ est « plus loin » sur la spirale.
$C_{22}A'_{22} = 44$. Donc $L(A'_{22}) = L(C_{22}) + 44 = 1936 + 44 + 1980$ qui est inférieur à 2006. $C$ est encore « plus loin » sur la spirale.
$2\ 006 - 1\ 980 = 26$ qui est inférieur à 46 (longueur de $[A'_{22}B_{23}]$).
Donc $C \in [A'_{22}B_{23}]$.
$A'_{22}$ a pour coordonnées (-22 ; -22) donc $C$ a pour coordonnées $(-22 + 26\ ; -22)$ soit $(4\ ; -22)$.

4. Soit $M$ un point quelconque dans le plan à coordonnées entières $(p, q)$.
Pour suivre le raisonnement ci-dessous, on se reportera à la figure précédente.

- Si $M$ est sur l'une des demi-droites, c'est ou le point $O$ ou l'un des points $A_n, C_n, A'_n$ ou $B_n$, c'est donc un des points de la spirale.
- si $M$ est dans la région bleue, la parallèle à $(Ox)$ passant par $M(p, q)$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point de coordonnées $(q, q)$, c'est le point $A_q$ (en effet $q > 0$), et la droite d'équation $y = -x$ au point de coordonnées $(-q, q)$, c'est le point $C_q$. Donc $M \in [A_qC_q]$. C'est un point de la spirale.
- si $M$ est dans la région jaune, la parallèle à $(Oy)$ passant par $M(p, q)$ coupe la droite d'équation $y = -x$ au point de coordonnées $(p, -p)$ c'est le point $C_{-p}$ (en effet $p < 0$) et la droite d'équation $y = x$ au point de coordonnées $(p, p)$, c'est le point $A'_{-p}$. Donc $M \in \left[C_{-p}A'_{-p}\right]$. C'est un point de la spirale.
- si $M$ est dans la région rose, la parallèle à $(Ox)$ passant par $M(p, q)$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point de coordonnées $(q, q)$, c'est le point $A'_{-q}$ (en effet $q < 0$) et la droite d'équation $y = -x+1$ au point de coordonnées $(-q + 1, q)$, c'est le point $B_{-q+1}$. Donc $M \in \left[A'_{-q}B_{-q+1}\right]$. C'est un point de la spirale.
- si $M$ est dans la région verte, la parallèle à $(Oy)$ passant par $M(p, q)$ coupe la droite d'équation $y = -x + 1$ au point de coordonnées $(p, -p+1)$, c'est le point $B_p$ (en effet $p > 0$) et la droite d'équation $y = x$ au point de coordonnées $(p, p)$, c'est le point $A_p$. Donc $M \in [B_pA_p]$. C'est un point de la spirale.

La spirale passe donc bien par tous les points du plan à coordonnées entières.

Envisageons maintenant le cas des autres repères du plan.
**1.** Soit $A$ le point de coordonnées (5,0) dans le repère $R_i$ où $i$ est un nombre de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

| Repère | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Coordonnées de $A$ dans $R_i$ | (0,5) | (0,5) | (0,-5) | (0,-5) |
| Segment auquel appartient $A$ | $[A_5C_5]$ | $[A_5C_5]$ | $[A'_5B_6]$ | $[A'_5B_6]$ |
| $L(A)$ | 95 | 95 | 115 | 115 |

| Repère | $R_6$ | $R_7$ | $R_8$ |
|---|---|---|---|
| Coordonnées de $A$ dans $R_i$ | (5,0) | (-5,0) | (-5,0) |
| Segment auquel appartient $A$ | $[B_5A_5]$ | $[C_5A'_5]$ | $[C_5A'_6]$ |
| $L(A)$ | 85 | 105 | 105 |

Soit $A'$ le point de coordonnées (-5,0) dans le repère $R_i$.

| Repère | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Coordonnées de $A'$ dans $R_i$ | (0,-5) | (0,-5) | (0,5) | (0,5) |
| Segment auquel appartient $A'$ | $[A'_5B_6]$ | $[A'_5B_6]$ | $[A_5C_5]$ | $[A_5C_5]$ |
| $L(A')$ | 115 | 115 | 95 | 95 |

| Repère | $R_6$ | $R_7$ | $R_8$ |
|---|---|---|---|
| Coordonnées de $A'$ dans $R_5$ | (-5 ; 0) | (5 ; 0) | (5 ; 0) |
| Segment auquel appartient $A'$ | $[C_5A'_5]$ | $[B_5A_5]$ | $[B_5A_5]$ |
| $L(A')$ | 105 | 85 | 85 |

**2.** Soit $B$ le point de coordonnées (2005 ; 2006) dans le repère $R_i$.

| Repère | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|
| Coord. de $B$ dans $R_i$ | (-2006,2005) | (2006,2005) | (-2006,-2005) |
| Segment de $B$ | $[C_{2006}A'_{2006}]$ | $[B_{2006}A_{2006}]$ | $[C_{2006}A'_{2006}]$ |
| $L(B)$ | 16 096 145 | 16 092 131 | 16 100 155 |

| Repère | $R_4$ | $R_6$ |
|---|---|---|
| Coord. de $B$ dans $R_i$ | (2006,-2005) | (2005,-2006) |
| Segment de $B$ | $[B_{2006}A_{2006}]$ | $[B_{2006}A_{2006}]$ |
| $L(B)$ | 16 088 121 | 16 104 167 |

| Repère | $R_7$ | $R_8$ |
|---|---|---|
| Coord. de $B$ dans $R_i$ | (-2005,2006) | (-2005,-2006) |
| Segment de $B$ | $[A_{2006}C_{2006}]$ | $[A'_{2006}B_{2007}]$ |
| $L(B)$ | 16 096 143 | 16 100 157 |

**3.** Le point $C$ trouvé restera bien sûr le même quel que soit le repère. Seules ses coordonnées changeront suivant le repère.
$C$ est le point de coordonnées (4,-22) dans le repère $R_5$.

| Repère $R_i$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Coord. de $C$ dans $R_i$ | (-22,-4) | (-22,4) | (22,-4) | (22,4) |

| Repère $R_i$ | $R_6$ | $R_7$ | $R_8$ |
|---|---|---|---|
| Coord. de $C$ dans $R_i$ | (4,22) | (-4,-22) | (-4,22) |

Ainsi, *dans tous les cas,* D *est sur un des segments qui constituent la spirale.*

**4.** Soit $D(p,q)$ un point à coordonnées entières.
Eliminons immédiatement le cas où $p = q = 0$ auquel cas $D = O$.
Notons $n = \max(|p|, |q|)$.

Si $n = |p|$ alors $|q| \leqslant n$ donc $-n \leqslant q \leqslant n$ et $p \in \{-n, n\}$.

Si $p = n$ alors $D(n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[B_nC_n]$

$$\text{car} \begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leqslant y_D \leqslant y_{C_n} = n \end{cases}$$

Si $p = -n$ alors $D(-n, q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[D_n A_{n+1}]$

$$\text{car} \begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n - 1 < -n \leqslant y_D \leqslant y_{D_n} = n \end{cases}$$

Si $n \neq |p|$ alors $|p| < |q| = \max(|p|, |q|) = n$ :
par suite, $|p| < n$ donc $-n < p < n$ et $q \in \{-n, n\}$.

Si $q = n$ alors $D(p, n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[C_n D_n]$

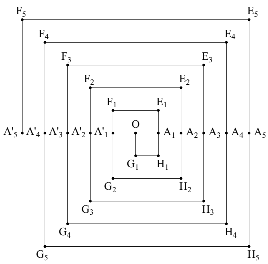
$$\text{car} \begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$$

Si $q = -n$ alors $D(p, -n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[A_n B_n]$

$$\text{car} \begin{cases} x_{A_n} = -n + 1 \leqslant x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$$

## Solution 3, proposée par l'académie de Lyon.

*Pour cette solution, l'équipe académique s'est inspirée des productions et (surtout) des erreurs des élèves.*




**1.** Il y a deux points de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$ : $A_5(5, 0)$ et $A'_5(-5, 0)$. La méthode la plus simple pour calculer $\ell(A_5)$ et $\ell(A'_5)$ est de « prolonger » la spirale et d'additionner les longueurs.
$\ell(A_5) = (1+1+2+2+3+3+\cdots+8+8+9+9)+5 = 9 \times 10 + 5 = 95$
puis $\ell(A'_5) = \ell(A_5) + 5 + 10 + 5 = 115$.
$\boxed{\ell(A_5) = 95 \text{ et } \ell(A'_5) = 115}$

**2.** $n$ étant un entier naturel non nul, la spirale passe dans cet ordre par les points $A_n(n, 0)$, $E_n(n, n)$, $F_n(-n, n)$, $A'_n(-n, 0)$, $G_{n+1}(-n, -n-1)$, $H_{n+1}(n+1, -n-1)$ et $A_{n+1}$.
On a alors : $A_n E_n = n$ ; $E_n F_n = 2n$ ; $F_n A'_n = n$ et $A'_n G_{n+1} = n + 1$.

Et on définit la spirale comme la réunion des segments $[OG_1]$,... $[G_n H_n]$, $[H_n E_n]$, $[E_n F_n]$ et $[F_n G_{n+1}]$, $n$ étant un entier naturel non nul.

Soit $L(n+1)$ la longueur de la portion de spirale qui va de $A_n$ à $A_{n+1}$.
$L(n+1) = L(n) + 4 \times 2$ (il faut ajouter 2 pour chaque coin) et $L(1) = 11$.
D'où $L(n) = 11 + 8(n-1) = 3 + 8n$.
Or, $\ell(A_n) = 3 + L(1) + L(2) + \cdots + L(n-1)$
Donc $\ell(A_n) = 3 + (3 + 8 \times 1) + (3 + 8 \times 2) + \cdots + (3 + 8(n-1))$
$= 3n + 4(n-1)n = 4n^2 - n$ (en utilisant la formule donnant la somme des premiers entiers naturels).

On en déduit : $\ell(E_n) = 4n^2$ ; $\ell(F_n) = 4n^2 + 2n$ ; $\ell(A'_n) = 4n^2 + 3n$ et $\ell(G_{n+1}) = (2n+1)^2$.
Ces résultats permettent de répondre aux deux questions suivantes :
$B$ est sur le segment $[E_{2006}F_{2006}]$ à 1 cm de $E_{2006}$.
Donc $\ell(B) = \ell(E_{2006}) + 1 = 4 \times 2006^2 + 1. \Rightarrow \boxed{\ell(B) = 16\ 096\ 145}$

**3.** $44^2 < 2006 < 45^2$ ou $(2 \times 22)^2 < 2006 < (2 \times 22 + 1)^2$.
Ceci permet de dire que $C$ est sur la partie de spirale qui va de $E_{22}$ à $G_{23}$.

$\ell(F_{22}) = 1980$ donc $C$ est sur $[F_{22}G_{23}]$.
$\ell(A'_{22}) = 2002$ donc $C$ est sur $[A'_{22}G_{23}]$ à 4 cm de $A'_{22}$.

D'où $\boxed{C(-22, -4)}$

**4.** Soit $X(a, b)$ un point du plan à coordonnées entières, différent des points $O$ et $G_1$.
On cherche à prouver que $X$ est sur un des segments :
$[G_nH_n]$ $(-n+1 \leqslant x \leqslant n$ et $y = -n)$
$[H_nE_n]$ $(x = n$ et $-n \leqslant y \leqslant n)$,
$[E_nF_n]$ $(-n \leqslant x \leqslant n$ et $y = n)$,
$[F_nG_{n+1}]$ $(x = -n$ et $-n-1 \leqslant y \leqslant n)$, $n$ étant un entier naturel non nul.
C'est la position de $X$ par rapport à la droite qui contient les point $H$ et $F$, la demi-droite qui contient les points $E$ et la demi-droite qui contient les points $G$ qui détermine le segment sur lequel se trouve $X$.
Si $b \geqslant -a$
$X$ est « au dessus » de la droite qui contient les points $H$ et $F$.

- si $b \geqslant a$ alors $-b \leqslant a \leqslant b$, ce qui permet de prouver que, $X$ n'étant pas $O$, $b$ est strictement positif et $X$ est sur $[E_bF_b]$.
- si $b < a$, alors $-a \leqslant b \leqslant a$, donc $a$ est strictement positif et $X$ est sur $[H_aE_a]$.

si $b < -a$
$X$ est « sous » la droite qui contient lespoints $H$ et $F$ puisque $a$ et $b$ sont entiers et $b \leqslant -a - 1$

- si $b \geqslant a - 1$, alors $a \leqslant b + 1 \leqslant -a$, ce qui permet de prouver que, $X$ n'étant pas $G_1$, $a$ est strictement négatif et $X$ est sur $[F_{-a}G_{-a+1}]$
- si $b < a - 1$, alors $b < b + 1 < a < -b$, $b$ est strictement négatif et $X$ est sur $[G_{-b}H_{-b}]$.

$\boxed{\text{La spirale passe par tous les points à coordonnées entières du plan}}$.