OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2007

Exercice 1 toutes séries)

Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.
Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4,3)
elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets
après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2)

Avertissement : on considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques.
De même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).
   Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?

2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1).
   Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3. Paul et Virginie jouent ensemble.
   Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie.
   Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale.
   Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.
   Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.
   Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Exercice 2 (toutes séries)

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?

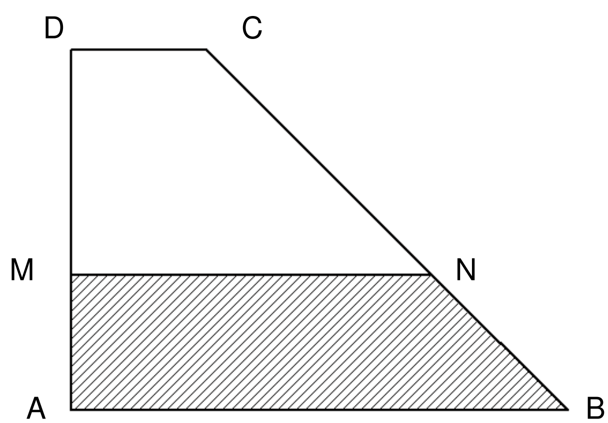
En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de utilisée pour la traiter).

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

   - $\widehat{ABC} = 45°$.
   - les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD>2.

   Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM = 2$.

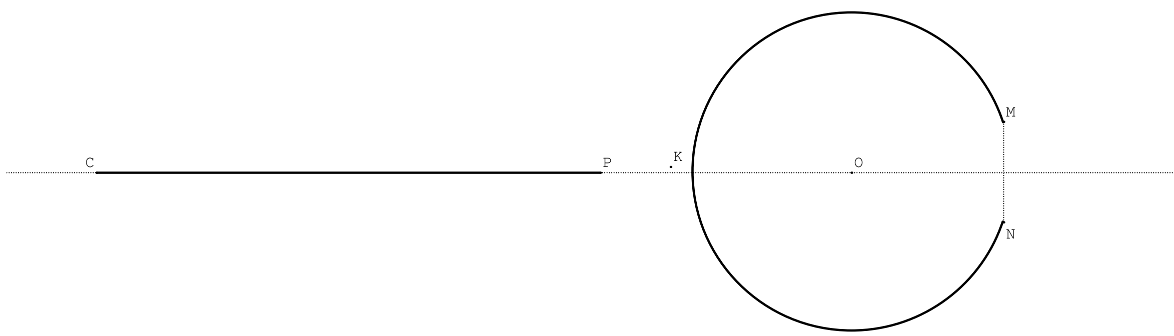


Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

Exercice 3 (toutes séries)

En sortant de son phare le gardien a laissé la porte ouverte, mais il a laissé son chien C (féroce) attaché à un piquet P situé à 2m du pied K du phare avec une chaîne PC de 10 m, à l'opposé de la porte dont l'ouverture MN mesure 1 m de large.
Je connais bien le gardien mais malheureusement le chien ne me connaît pas.
Vais je pouvoir entrer pour attendre mon ami ?
Le rayon de la base circulaire du phare est 3 m.



Exercice 4 (Série S)

On dispose d'un ensemble de 5 entiers. Si on les ajoute deux à deux, on obtient les dix sommes suivantes :
2001, 2006, 2007, 2008, 2009, 2014, 2017, 2018, 2023, 2025.

Quels sont ces 5 nombres ?

Exercice 4 (Série ES)

Soient quatre réels a, b, c, d tels que $a < b < c < d$.
On pose $x = (a + b)(c + d)$ $y = (a + c)(b + d)$ $z = (a + d)(b + c)$
Comparer les nombres x , y et z .

Exercice 4 (Séries STI- STL)

On considère un parallélogramme ABCD et les bissectrices des angles au sommet :
$\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ **et** $\widehat{D}$.

Déterminer la nature du quadrilatère dont les sommets sont les points d'intersection de ces bissectrices deux à deux.