SUJETS NATIONAUX

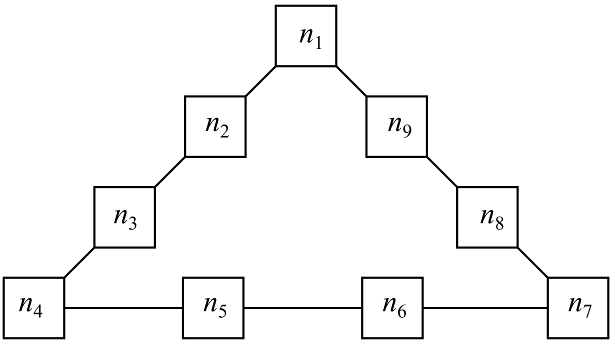
Exercice n° 1

Enoncé

Partie A : Questions préliminaires
On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

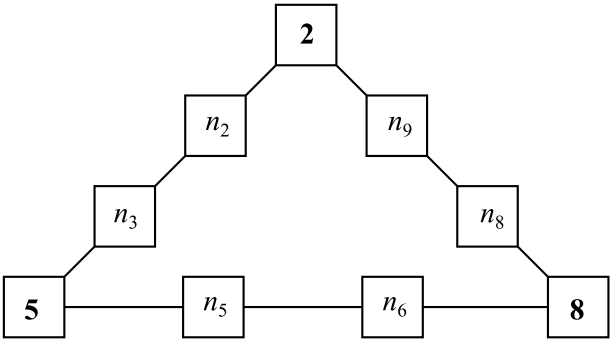
1. Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2. Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques
On place tous les nombres entiers de 1 à 9 dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.
(C'est à dire si : $n_1+n_2+n_3+n_4 = n_4+n_5+n_6+n_7 = n_7+n_8+n_9+n_1 = S$)
On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1. Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2. On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   (a) Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
   (b) En déduire qu'on a $17 \leqslant S \leqslant 23$
   (c) Donner la liste des couples $(S,\ T)$ ainsi envisageables.
3. Proposer un triangle 17-magique.
4. Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
5. (a) Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
   (b) Proposer un triangle 19-magique.
6. Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$-magique.
7. Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

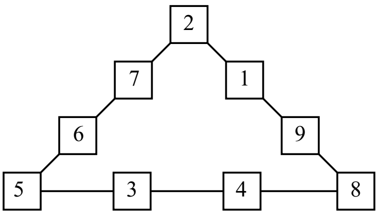
Eléments de solution

Partie A

1. Plus petite valeur : 6 $(= 1 + 2 + 3)$
2. Plus grande valeur : 14 $(= 7 + 8 + 9)$.

Partie B

1. Triangle 20-magique :

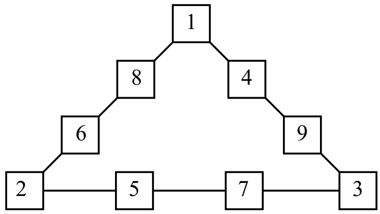


2. a) $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1$
   $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + T$

b) $\dfrac{6+45}{3} \leqslant S \leqslant \dfrac{24+45}{3}$.

c) Liste des couples $(S,\ T)$ envisageables.
$(17,\ 6), (18,\ 9), (19,\ 12), (20,\ 15), (21,\ 18), (22,\ 21), (23,\ 24)$

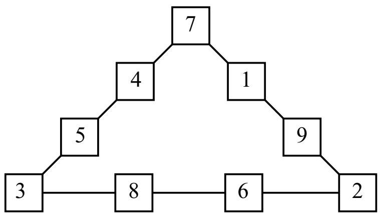
3. Triangle 17-magique :



4. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors : $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 9$.
Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.
(On peut aussi envisager toutes les possibilités).

5. a) Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$.
Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

b) Triangle 19-magique



6. Il suffit de remplacer chaque n par $10 - n$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7. Les valeurs de S pour lesquelles on peut trouver un triangle $S-$magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).
18 n'est pas $S-$magique. Donc 22 ne l'est pas non plus.