Exercice n° 2

Enoncé

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.
On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).
L'unité de longueur choisie est le centimètre.

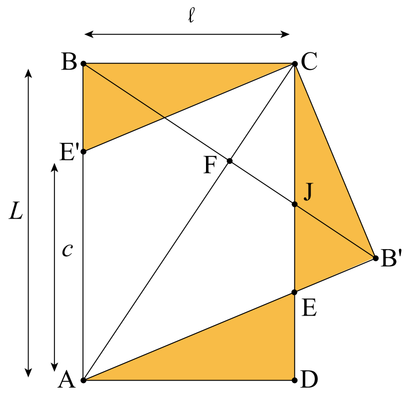
1. Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $\ell = 8$.

   On pourra noter c la longueur du côté du losange.

   Les questions suivantes sont indépendantes.
2. Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du côté du losange.
3. On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers. Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?
4. À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ. Exprimer, en fonction de L, la largeur ℓ de la feuille de départ.
5. Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Eléments de solution

1. Construction du losange à partir d'une feuille rectangulaire $L = 16\ cm$, $\ell = 8\ cm$.



2. Sachant que AE'CE est un losange, on a $(16 - c)^2 + 8^2 = c^2$ soit $c = 10$.

3. On a nécessairement :
   $(L-7,5)^2+\ell^2=7,5^2$ avec $L \geqslant 8$, soit $\ell^2=L(15-L)$.
   D'où les seules réponses entières : $L=12$ et $\ell=6$. Et ces deux dimensions conduisent à un losange de côté 7,5 cm.
4. Sachant que AE'CE est un losange, on a $ED=E'B$ donc les triangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25 % de l'aire du rectangle.
   D'où l'égalité : $(L-c)\ell=0,25L\ell$ d'où $c=0,75L$.
5. Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
   Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
   La symétrie assure les égalités de longueurs $CE'=CE$ et $AE=AE'$.
   On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').