OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2012

MERCREDI 21 MARS 2012 (8h – 12h)

SUJET PREMIERE ES / L / STG / ST2S

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Exercice National 1 :

On dit qu’un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n’est nul ;
- il s’écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d’eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n’est pas *digisible* car il n’est pas divisible par 3.

On rappelle qu’un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1) Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

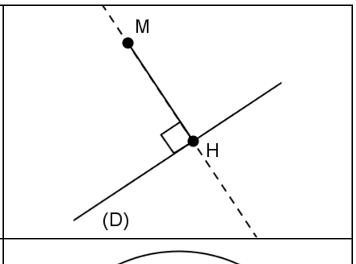
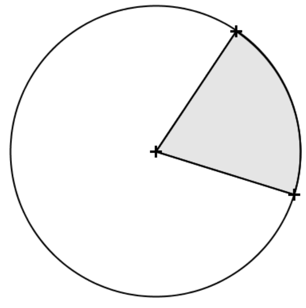
2) Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3) Soit n un entier *digisible* s’écrivant avec un 5.
   a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   c) Démontrer que n s’écrit avec au plus quatre chiffres.
   d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s’écrivant avec un 5.

4) Soit n un entier *digisible* quelconque.
   a) Démontrer que n s’écrit avec au plus sept chiffres.
   b) Si n s’écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

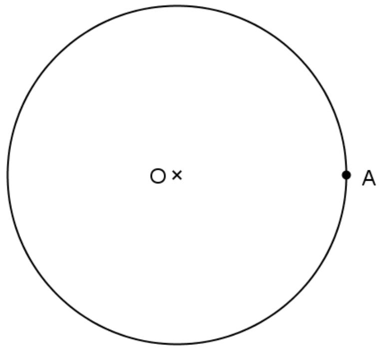
Exercice National 2 :

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d’intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l’angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors* ***l’aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l’exercice, on considèrera la distance d’un point M à* ***un segment*** *[BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

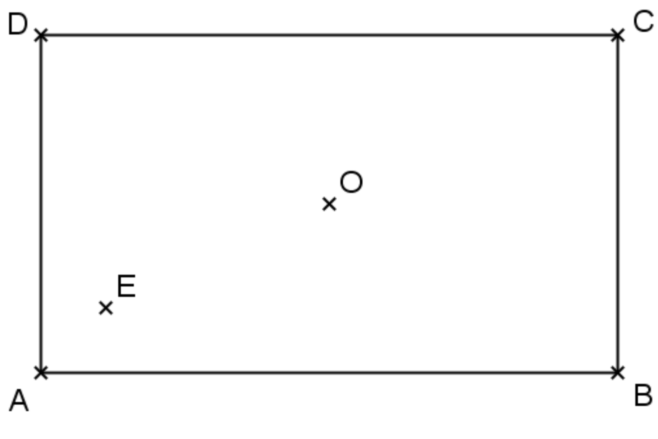
Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1) Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2) Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3) Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?
2) a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
   b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
   c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
4) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Exercice Académique 1 :

Un magicien présente un jeu non truqué de 21 cartes. Un spectateur choisit une carte, qu'il mémorise mais ne révèle pas, et remet la carte choisie n'importe où dans le tas de cartes.

Le magicien procède alors à une opération simple, décrite dans l'algorithme suivant :

> Il forme trois tas de cartes, dans lesquels sont distribuées les 21 cartes. Chaque tas reçoit donc une carte à tour de rôle, face visible.
> Une fois que les trois tas ont été formés, le spectateur désigne le tas contenant sa carte. Le magicien prend alors un des tas qui ne contiennent pas la carte du spectateur, met le tas désigné au dessus, suivi du troisième tas.

1) Après que cette opération a été effectuée, combien de cartes au minimum sont sous la carte choisie par le spectateur ? Combien au minimum sont au dessus ?
2) Le magicien répète l'opération une seconde fois. Combien de cartes au minimum sont sous la carte choisie par le spectateur ? Combien au minimum sont au dessus ?
3) L'opération est répétée une troisième et dernière fois. Montrer que la carte choisie par le spectateur ne peut être que dans une seule position dans le tas de cartes, et préciser cette position.

Exercice Académique 2 :

Dans un carré de 10 cm de côté, on veut réaliser un graphique statistique dans lequel les aires des 3 parties doivent être proportionnelles aux fréquences qu'elles représentent (O est le centre du carré).
Le point I est à 2 cm du sommet le plus proche.
Calculer les distances de J et K aux sommets du carré les plus proches.