OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2013

Mercredi 20 mars 2013
8h00-12h00

SUJET PREMIERE ES / L / ST2S / STMG

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

<u>Exercice National 1</u> : Les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. **a**. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a. Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

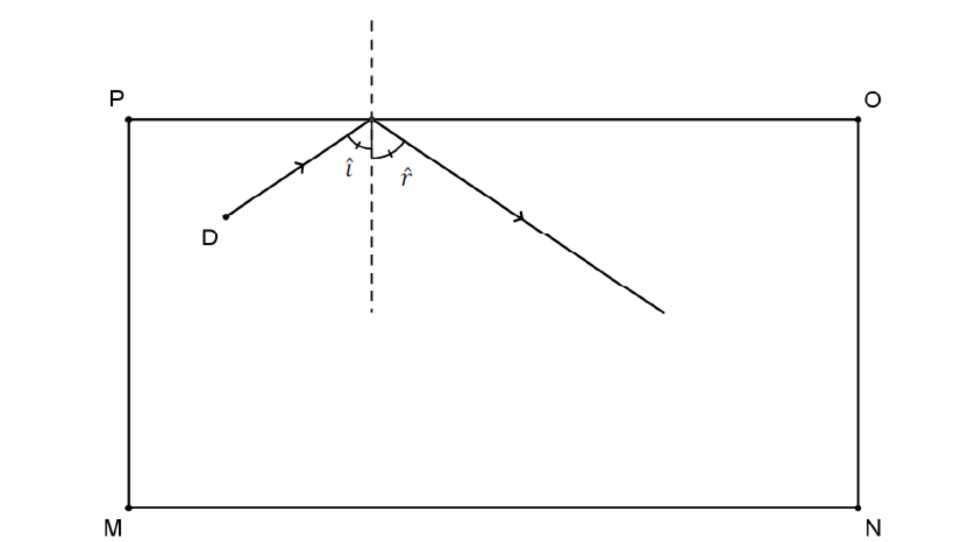
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair. En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice National 2: Le billard rectangulaire

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-après $(\hat{i} = \hat{r})$.



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

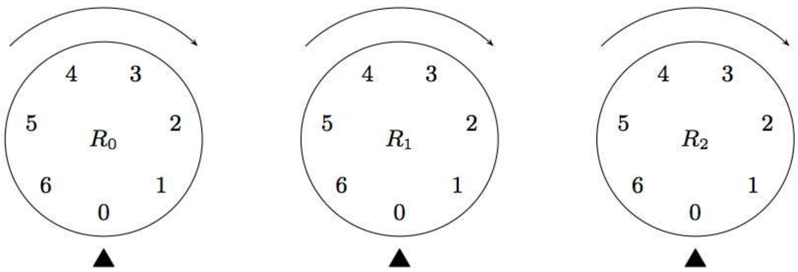
b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

<u>Exercice Académique 1</u> Le compteur

Un compteur est composé de trois roues crantées, nommées R_0, R_1 et R_2 et comportant toutes les trois 7 crans, numérotés de 0 à 6. Ce compteur est conçu de sorte que :

- On ne peut tourner que la roue R_0.
- Les roues tournent toujours d'un cran vers le cran suivant, dans cet ordre :
  $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 0$
- Lorsque la roue R_0 effectue un tour complet, c'est-à-dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue R_1 tourne d'un cran.
- Lorsque la roue R_1 effectue un tour complet, c'est-à-dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue R_2 tourne d'un cran.
- Initialement, les roues R_0, R_1 et R_2 affichent toutes 0.

Les roues ne peuvent tourner que dans ce sens



Les flèches noires indiquent les numéros affichés par chaque roue

Entre chaque question, le compteur est remis à zéro, c'est-à-dire que chaque roue affiche de nouveau 0.

1. On tourne la roue R_0 de 15 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?

2. On tourne la roue R_0 de 100 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?

3. On tourne la roue R_0 jusqu'à ce que la roue R_2 affiche 5 pour la première fois. De combien de crans a-t-on tourné R_0 ?

4. De combien de crans faut-il tourner R_0 pour les roues reviennent pour la première fois en même temps à 0 ?

5. On tourne la roue R_0 de 3580 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?

6. Soit $N = k_0 + k_1 \times 7 + k_2 \times 7^2$, où k_0, k_1 et k_2 sont trois entiers de $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. De combien de crans faut-il tourner la roue R_0 pour que, simultanément et pour la première fois, R_0 affiche k_0, R_1 affiche k_1 et R_2 affiche k_2 ?

7. Après avoir tourné de n crans la roue R_0, les roues R_0, R_1 et R_2 affichent respectivement 1,2 et 3. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

Exercice Académique 2

Lors d’un dîner avec des amis, monsieur et madame Martin et leurs deux enfants sont interrogés sur leurs âges respectifs.
Monsieur Martin répond : « À nous quatre, nous avons 128 ans. »

Cette réponse paraissant insuffisante à leurs amis, madame Martin ajoute :
« À nous deux, mon mari et moi sommes trois fois plus âgés que nos deux fils. »

Ces derniers prennent alors la parole :
L’aîné précise qu’il a moins de la moitié de l’âge de sa mère.
Le cadet remarque que la différence d’âge entre son père et sa mère est sept fois plus grande que la différence d’âge entre son frère et lui.

Quels sont les âges des quatre membres de la famille Martin?

Les réponses recherchées sont des nombres entiers.