OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

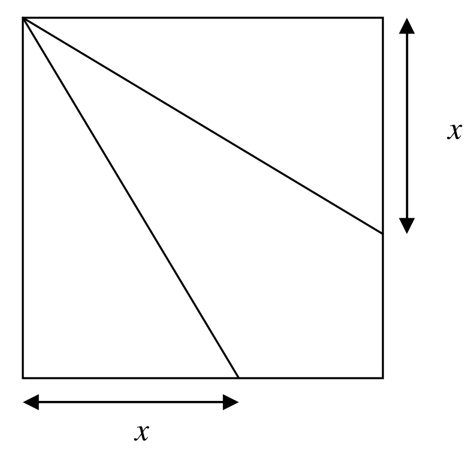
SESSION 2008

MERCREDI 12 MARS 2008 (14h – 18h)

SUJET PREMIERE S

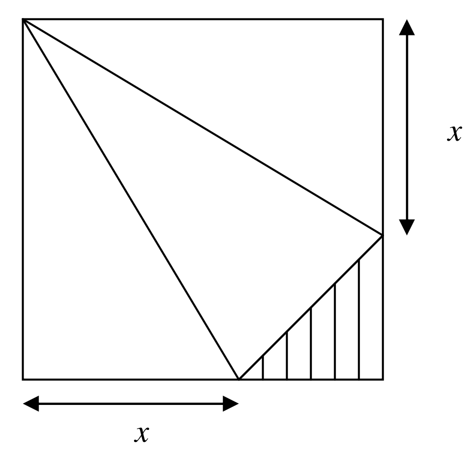
EXERCICE 1

Un partage équitable



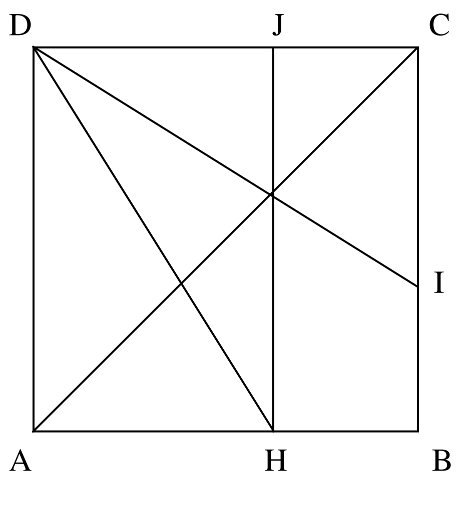
1) Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2) Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3) Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

EXERCICE 2

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1) Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».

2) Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».

3) Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».

4) On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

EXERCICE 3

1	**3**	**1**
3	**5**	**6**
2	**4**	**4**

1) On peut modifier le tableau ci-dessus à l'aide des opérations suivantes :

- multiplier tous les nombres d'une ligne par 2,
- soustraire 1 à tous les nombres d'une colonne.

Montrer qu'en appliquant ces opérations, on peut obtenir un tableau dont tous les nombres sont nuls.

2) Montrer qu'on peut obtenir le même résultat à partir de tout tableau de 3 lignes et 3 colonnes ne contenant que des entiers strictement positifs.
(On pourra numéroter les lignes L1, L2, L3 et les colonnes C1, C2, C3)

EXERCICE 4

1) Question préliminaire :

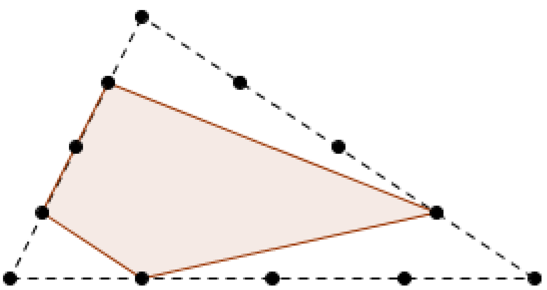
Soit deux triangles MNP et MNP' tels que (PP') soit parallèle à (MN). Démontrer que ces deux triangles ont la même aire.

2) Chaque côté d'un triangle T est partagé en 4 segments de longueur égale. On construit des polygones D1, D2, D3 et D4 comme indiqué sur la figure.

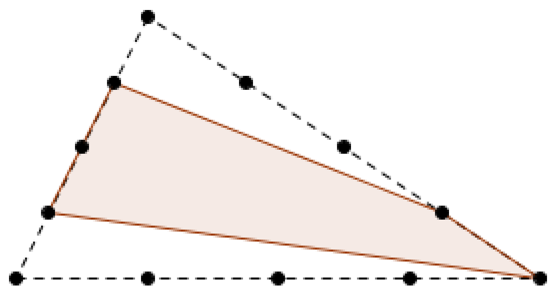
Voici quatre « photos » de ce triangle (en pointillés) et des polygones D1, D2, D3 et D4.

a) Montrer de proche en proche que D1, D2, D3 puis D4 ont des aires égales.

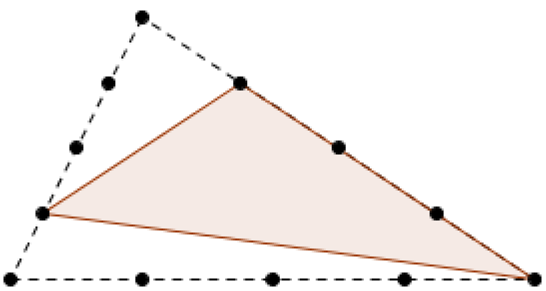
b) En déduire le rapport : $\dfrac{\text{aire(D1)}}{\text{aire(T)}}$.



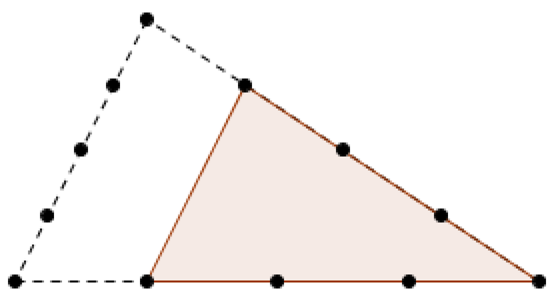
Polygone D1



Polygone D2



Polygone D3



Polygone D4