OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2009

MERCREDI 11 MARS 2009 (14h – 18h)

SUJET PREMIERE S

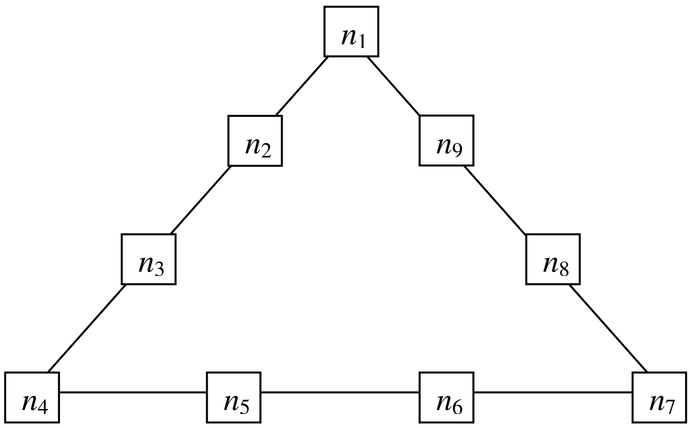
Exercice 1 :

Partie A : Questions préliminaires

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle est la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

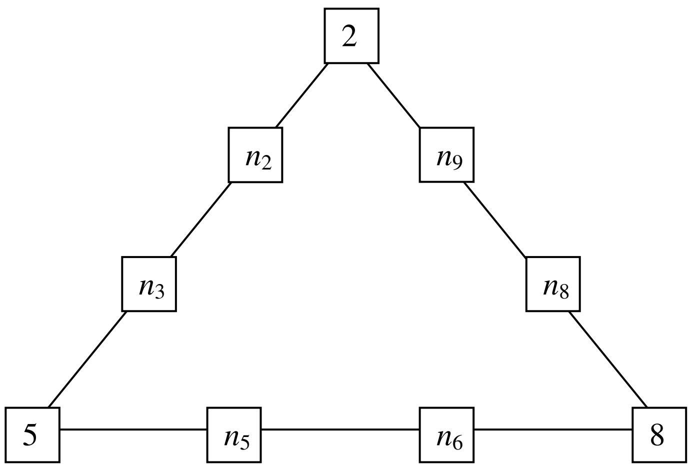


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur *S*, on dit que le triangle est *S*-magique.

(C'est-à-dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
   b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$.
   c. Donner la liste des couples (S , T) ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
   b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

<u>Exercice 2 :</u>

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.
<u>On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange</u> (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

   On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
   Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- A partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
   Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

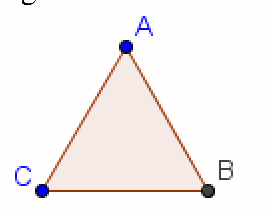
Exercice 3 :

Initialement, n oiseaux se trouvent chacun au sommet d'un poteau, ces n sommets formant un polygone régulier à n côtés. Lorsqu'ils sont apeurés, ces oiseaux s'envolent. Puis après quelques temps, ils reviennent se poser sur les n poteaux, mais pas nécessairement à leurs positions initiales. Deux oiseaux ne peuvent pas se poser sur un même poteau.
On dit que n oiseaux forment un groupe de « bons géomètres » lorsque, quelles que soient les positions avant et après l'envol, on peut trouver trois oiseaux (parmi les n) qui forment, avant et après l'envol, deux triangles

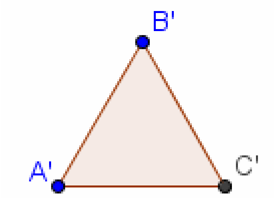
- soit tous deux rectangles ;
- soit tous deux acutangles (triangle dont les trois angles sont aigus).

Par exemple, pour $n = 3$, on peut schématiser le problème de la manière suivante.
Appelons A l'oiseau posé en A avant l'envol. Sa position une fois reposé sera notée A'.

Avant l'envol, les oiseaux A, B, C forment un triangle acutangle.



Après l'envol, les oiseaux peuvent se reposer selon plusieurs combinaisons, par exemple :



Dans tous les cas, le triangle A'B'C' est un triangle acutangle.

Ainsi 3 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

On rappelle que tous les polygones réguliers sont inscrits dans un cercle.

1- Vérifier que 4 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

2- Pour $n = 5$, donner une position initiale et une position d'arrivée qui justifient que 5 oiseaux ne forment pas un groupe de « bons géomètres ».

3- Pour $n = 6$, les sommets des poteaux forment un hexagone régulier.
Montrer qu'il existe toujours 3 oiseaux qui, avant et après l'envol, forment un triangle rectangle.
Que peut-on en conclure quant au fait que 6 oiseaux forment ou non un groupe de « bons géomètres » ?

4- Montrer que si n est pair, n oiseaux forment nécessairement un groupe de « bons géomètres ».

<u>Exercice 4 :</u>

L'intérieur d'un quadrilatère ABCD est partagé en 4 triangles par ses diagonales.
Les centres des cercles circonscrits à ces 4 triangles forment un quadrilatère STUV.

1- Montrer que STUV est toujours un parallélogramme.

2- Quelles propriétés doit avoir le quadrilatère ABCD pour que STUV soit un carré ?