# OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

## SESSION 2013

Mercredi 20 mars 2013
8h00-12h00

# SUJET PREMIERE S

**Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5**

## <u>Exercice National 1</u> : Les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

**1. a.** Montrer que 364 est un nombre Harshad.

**b.** Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

**2. a.** Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

**b.** Soit $n$ un entier non nul. Donner un nombre Harshad de $n$ chiffres.

**3. a.** Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

**b.** En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

**c.** Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

**4. a.** Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

**b.** En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

**c.** Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

**5**. **a**. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

**b.** Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

**6. a.** Soit $i$ un chiffre compris entre 0 et 8.

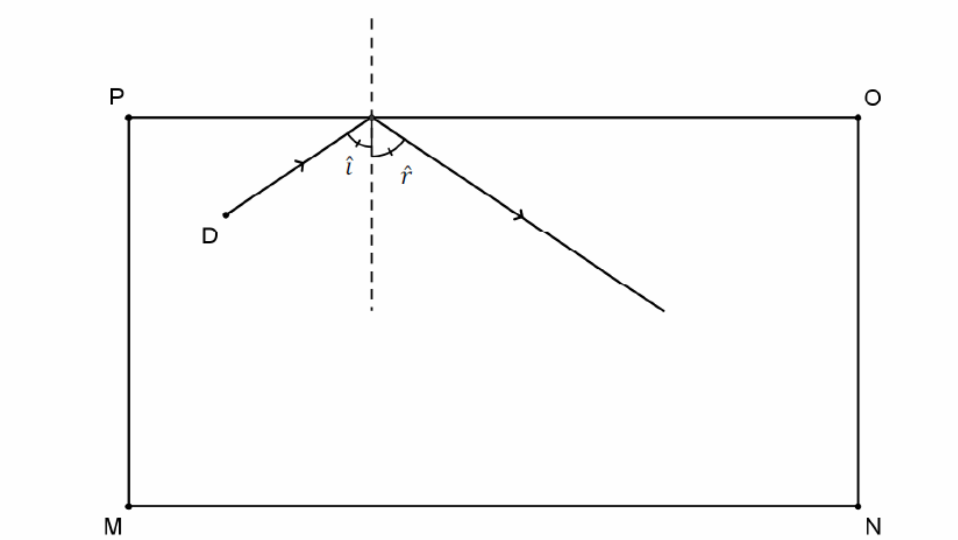
Soit $p$ un entier dont le chiffre des dizaines est $i$ et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre $p$ soit celle de $p + 2$ est un nombre pair. En déduire que $p$ et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

**b.** Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

## <u>Exercice National 2</u>: Le billard rectangulaire

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-après $(\hat{i} = \hat{r})$.




**1.** On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

**a.** Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

**b.** Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

**c.** Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

**2.** On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

**a.** Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

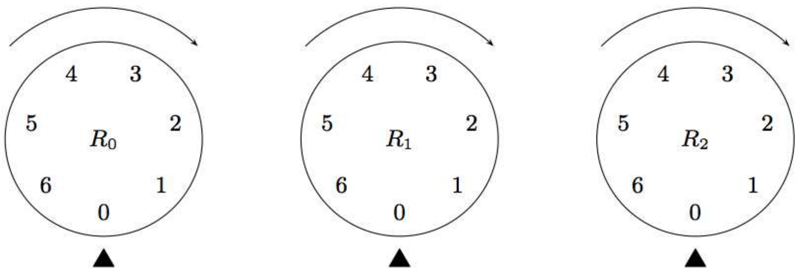
**b.** Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

## Exercice Académique 1 Le compteur

Un compteur est composé de trois roues crantées, nommées $R_0$, $R_1$ et $R_2$ et comportant toutes les trois 7 crans, numérotés de 0 à 6. Ce compteur est conçu de sorte que :

- On ne peut tourner que la roue $R_0$.
- Les roues tournent toujours d'un cran vers le cran suivant, dans cet ordre : $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 0$
- Lorsque la roue $R_0$ effectue un tour complet, c'est-à-dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue $R_1$ tourne d'un cran.
- Lorsque la roue $R_1$ effectue un tour complet, c'est-à-dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue $R_2$ tourne d'un cran.
- Initialement, les roues $R_0$, $R_1$ et $R_2$ affichent toutes 0.

Les roues ne peuvent tourner que dans ce sens



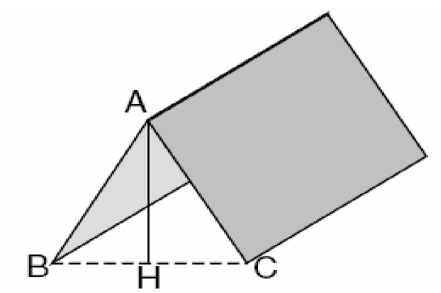

Les flèches noires indiquent les numéros affichés par chaque roue

***Entre chaque question, le compteur est remis à zéro, c'est-à-dire que chaque roue affiche de nouveau 0.***

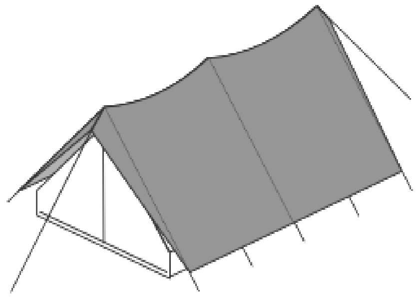
1. On tourne la roue $R_0$ de 15 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?
2. On tourne la roue $R_0$ de 100 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?
3. On tourne la roue $R_0$ jusqu'à ce que la roue $R_2$ affiche 5 pour la première fois. De combien de crans a-t-on tourné $R_0$ ?
4. De combien de crans faut-il tourner $R_0$ pour les roues reviennent pour la première fois en même temps à 0 ?
5. On tourne la roue $R_0$ de 3580 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?
6. Soit $N = k_0 + k_1 \times 7 + k_2 \times 7^2$, où $k_0, k_1$ et $k_2$ sont trois entiers de $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. De combien de crans faut-il tourner la roue $R_0$ pour que, simultanément et pour la première fois, $R_0$ affiche $k_0$, $R_1$ affiche $k_1$ et $R_2$ affiche $k_2$ ?
7. Après avoir tourné de $n$ crans la roue $R_0$, les roues $R_0$, $R_1$ et $R_2$ affichent respectivement 1,2 et 3. Quelles sont les valeurs possibles de $n$ ?

## Exercice Académique 2

Un campeur, arrivé dans un camping sans autre équipement pour dormir qu'une bâche carrée de 3 m de côté, souhaite l'utiliser comme toile de tente pour essayer de dormir dans les mêmes conditions que son voisin.




*La tente improvisée*



*La tente du voisin*

On pose $x$ = AH la hauteur de la tente improvisée et on considère que le triangle ABC est isocèle.
On assimile la forme de la tente à un prisme de base ce triangle.

1. Déterminer l'aire de ABC en fonction de $x$.
2. Quelle hauteur $x$ de piquet choisir pour que le volume de la tente soit maximal ?
   Quel sera alors le volume de la tente ?
   *On pourra étudier la fonction correspondant au carré du volume...*