OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

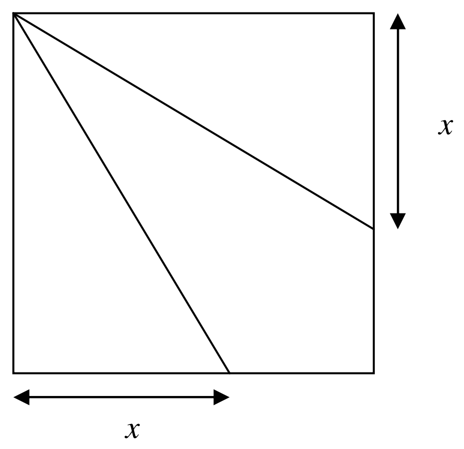
SESSION 2008

MERCREDI 12 MARS 2008 (14h – 18h)

SUJET PREMIERES STI /STL

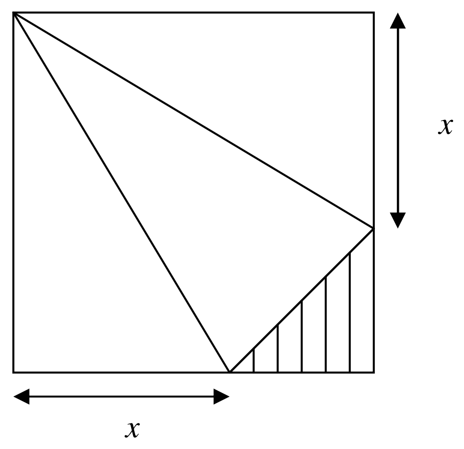
EXERCICE 1

Un partage équitable



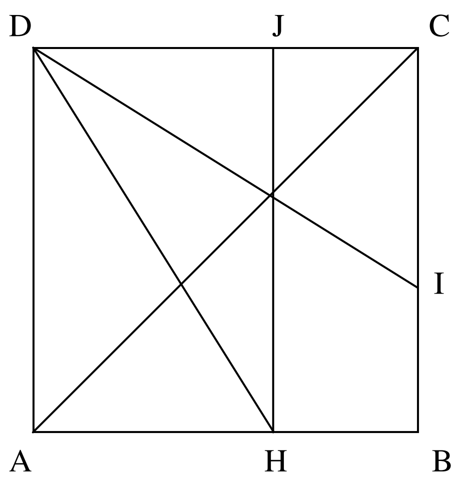
1) Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2) Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3) Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l’impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu’en est-il ?

EXERCICE 2

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2=1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3=1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq 1$; $3=1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1) Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».

2) Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».

3) Montrer que si n est « bon », alors $2n+2$ et $2n+9$ sont « bons ».

4) On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

EXERCICE 3

Dans un verre conique, on verse successivement du mercure (densité 13,59), de l'eau (densité 1) et de l'huile (densité 0,915). Les trois liquides remplissent le verre sans se mélanger et forment trois couches d'égale épaisseur.

Le verre contient-il alors une masse plus importante de mercure, d'eau ou d'huile ?

EXERCICE 4

1) Démontrer que pour tous réels u et v : $u^2 + v^2 \geq 2uv$.

2) En déduire que, quels que soient les réels a, b et c : $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$.

3) Déterminer alors le plus petit entier k tel que, quels que soient les nombres réels a, b et c :

$$(a+b+c)^2 \leq k(a^2+b^2+c^2)$$