

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

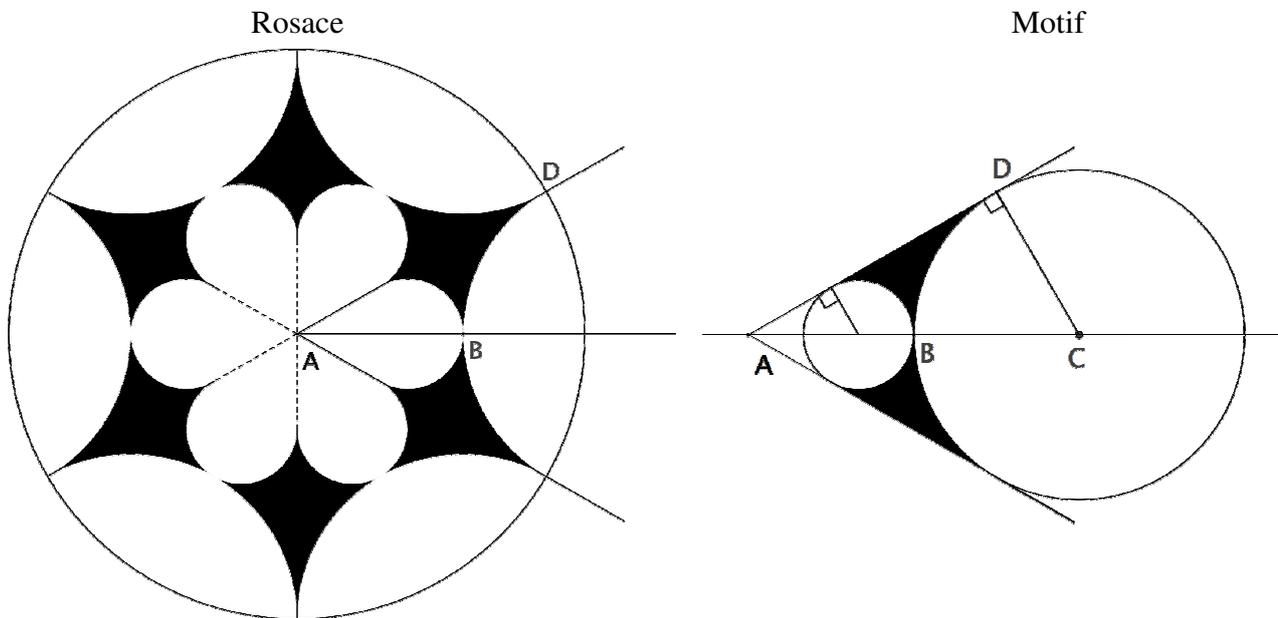
MERCREDI 10 MARS 2010 (14h – 18h)

SUJET PREMIERE STI / STL

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Exercice National 1 : La Rosace

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.



- 1) Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?
- 2)
 - a) Montrer que $AB = BC$.
 - b) Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?
 - c) D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?
- 3) On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice National 2 : A la recherche du « chaînonze »

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :

« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11 ».

Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7+9-5=11$ et $0+9-9=0$.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.

Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

- 1) Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?
- 2) Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{ème} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

- 3) Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constate-t-on ?

On appelle **chaînonze fini** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.

On appelle **chaînonze n-périodique** un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

- 4) On considère la chaîne « $a b$ » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.
 - a) Etudier le cas particulier « $a a$ ».
 - b) Etudier le cas $b = a - 1$.
 - c) Etudier les autres cas.
- 5) Montrer qu'en prolongeant la chaîne « $a b$ » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercice Académique 1 : La citerne

On dispose de trois robinets A, B et C pour remplir une citerne.

Lorsque A et B coulent ensemble, ils mettent 2h.

Lorsque B et C coulent ensemble, ils mettent 1h30.

Et lorsque C et A coulent ensemble, ils mettent 2h30.

Quel temps mettraient-ils s'ils coulaient tous les trois ensemble ? Chacun séparément ?

Exercice Académique 2 : La ficelle coupée en deux

Une ficelle de longueur L est coupée en deux morceaux ; avec l'un d'eux on forme un cercle et avec l'autre un carré.

A quel endroit doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires du disque et du carré soit minimale ?