OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2011

MERCREDI 23 MARS 2011 (8h – 12h)

SUJET PREMIERE STI / STL

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice National 1 : *Essuie-glaces*

(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1) Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que $OA = 15$ cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

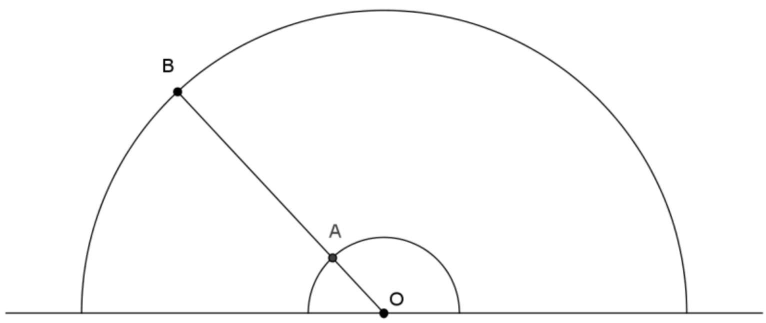


Fig. 1

2) Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que $OO' = R$ (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

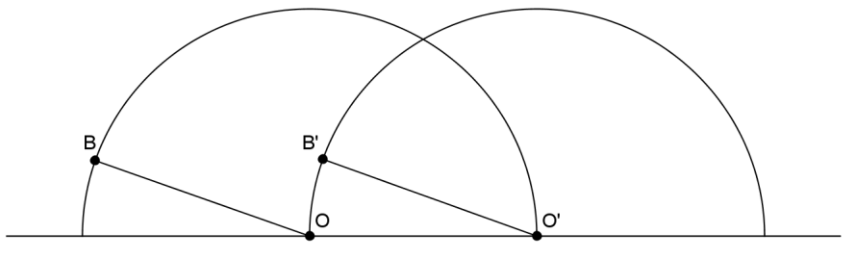


Fig. 2

3) Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{\text{OCA}} = 30°$, $\text{CB} = 4 \times \text{CA}$ et $\text{OC} = \sqrt{3} \times \text{CA}$. On pose $\text{CA} = a$.

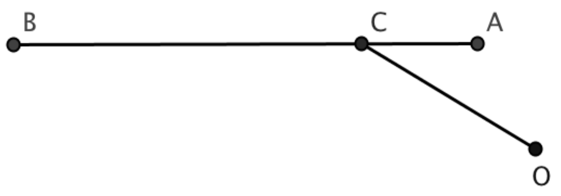


Fig. 3

a) Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.
Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

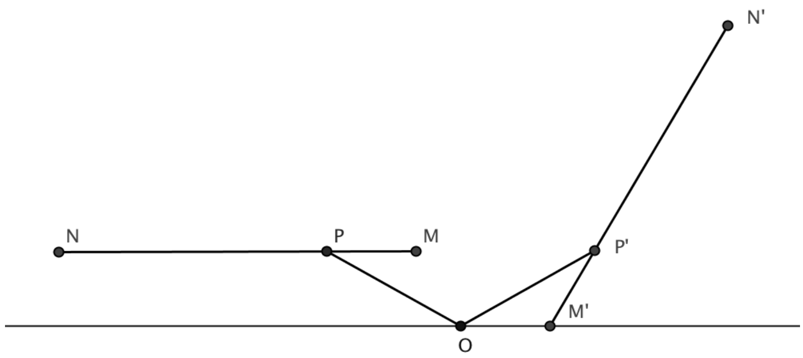


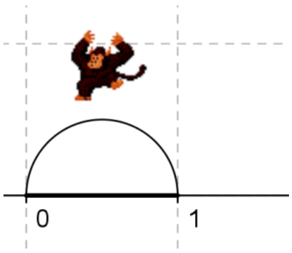
Fig. 4

<u>Exercice National 2 :</u> *Le singe sauteur*

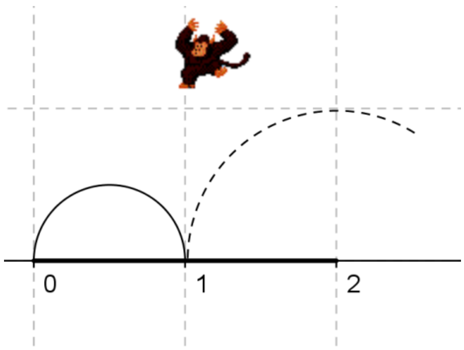
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'***origine*** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en ***exactement*** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (***effectués*** dans cet ordre) et sans ***jamais*** sortir du segment $[0;n]$.

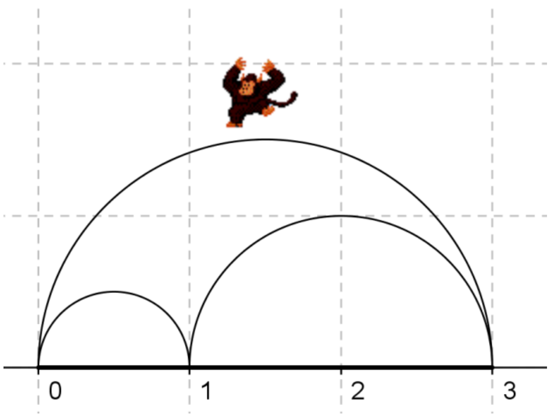
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0;2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0;3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



1) Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2) Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de même que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3) Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier *m*, on a : $1+2+3+\ldots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4) Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.
5) a) Montrer que si le nombre entier *n* est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier *n* pour qu'il soit atteignable.
   b) La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?
6) On suppose $N \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par $1+2+3+\ldots$
   Montrer que $N+4$ est aussi atteignable.

<u>Exercice Académique 1 :</u> *Drôles de puissances*

1) Calculer l'expression $\dfrac{\left(8^{n+1}+8^{n}\right)^{2}}{\left(4^{n}-4^{n-1}\right)^{3}}$ pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ et $n=3$.
2) Montrer que ce résultat est valable pour tout entier naturel *n*.

<u>Exercice Académique 2 :</u> *Somme de fractions*

1) a) Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.
   b) A quelle condition sur *p* et *q* a-t-on l'égalité (E) : $\dfrac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=\sqrt{p}-\sqrt{q}$?
   Dans ce cas, écrire l'égalité (E) obtenue, uniquement en fonction de *q*.
2) Déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geq 100\,.$$