OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2012

MERCREDI 21 MARS 2012 (8h – 12h)

SUJET PREMIERE STI2D / STD2A / STL

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Exercice National 1 :

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :
- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,
- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1) Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

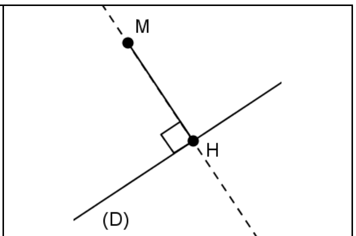
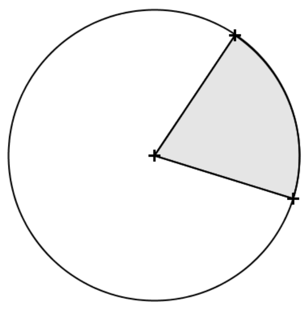
2) Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3) Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4) Soit n un entier *digisible* quelconque.
   a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

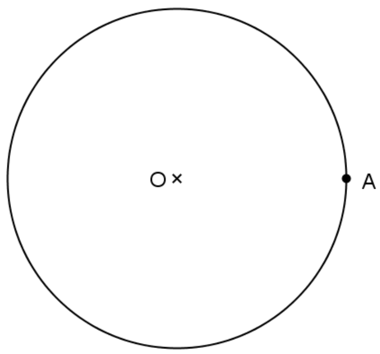
Exercice National 2 :

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à* ***un segment [BC]*** *comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

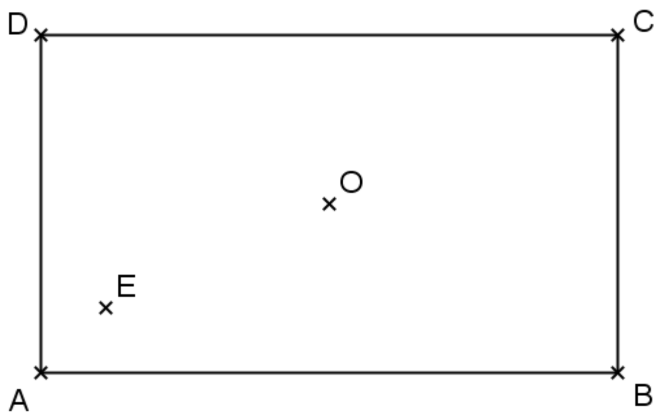
Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1) Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2) Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3) Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?
2) a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
   b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
   c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
4) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Exercice Académique 1 :

a et b sont deux réels non nuls et de même signe.
On définit :

- le nombre $m=\dfrac{a+b}{2}$, qui est la moyenne arithmétique de a et b ;
- le nombre $n=\sqrt{ab}$, qui est leur moyenne géométrique ;
- le nombre p tel que $\dfrac{2}{p}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, qui est leur moyenne harmonique.

1) On prend $a=2$ et $b=8$. Calculer m, n et p puis comparer ces trois moyennes.

2) Même question pour $a=-12$ et $b=-3$.

3) Montrer que $p=\dfrac{2ab}{a+b}$ puis calculer $m-p$ en fonction de a et b.

4) Montrer que si a et b sont des réels strictement négatifs, alors $m \leq p < n$.

5) a) Calculer m^2-n^2 et n^2-p^2 en fonction de a et b.
   b) En déduire que si a et b sont des réels strictement positifs, alors $p \leq n \leq m$.

Exercice Académique 2 :

Calculer la somme suivante sans utiliser la calculatrice :
$\left(1^2-2^2-3^2+4^2\right)+\left(5^2-6^2-7^2+8^2\right)+\left(9^2-10^2-11^2+12^2\right)+\ldots+\left(2009^2-2010^2-2011^2+2012^2\right)$.