Académie de Versailles

Olympiades académiques de mathématiques de quatrième

Concours 2007

***

Mardi 24 avril 2007

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
INRIA
partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

Deux mille sept 2 007

On considère le nombre

$$N = 200\ 720\ 072\ 007\ 2\ldots\ldots 720\ 072\ 007$$

écrit en copiant 2 007 fois les chiffres 2, 0, 0, 7 (N est un nombre de 8 028 chiffres).

1. N est-il divisible par 9 ?

2. N est-il divisible par 81 ?

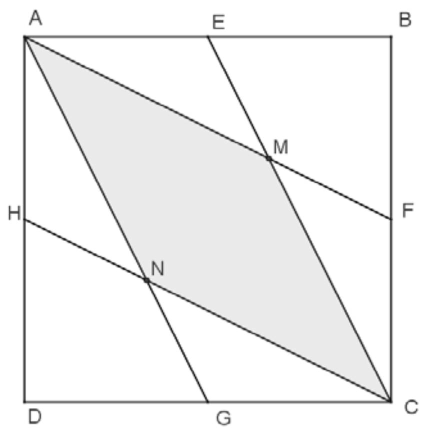
Exercice numéro 2

Losange médian

On considère un carré ABCD de côté 1 et les milieux E, F, G et H de ses côtés. Les droites (AF) et (EC) se coupent en M, les droites (AG) et (CH) se coupent en N.

1. Montrer que AMCN est un losange.

2. Déterminer l'aire du losange AMCN.



Exercice numéro 3

Fractions égyptiennes

1. On sait que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Est-il possible de trouver des entiers naturels **distincts** a et b tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$?

2. Trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$.

3. Trouver trois entiers naturels distincts a, b et c tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

4. Même question pour quatre entiers naturels distincts tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.

5. Comment peut-on choisir 10 entiers naturels tous distincts tels que la somme de leurs inverses soit 1 ?
   Même question si on veut choisir 2 007 entiers naturels distincts.

Exercice numéro 4

La machine à rectangles pythagoriciens

Une unité de longueur est donnée dans le plan. Un rectangle est dit *pythagoricien* lorsque les longueurs de ses côtés et de sa diagonale sont des nombres entiers.

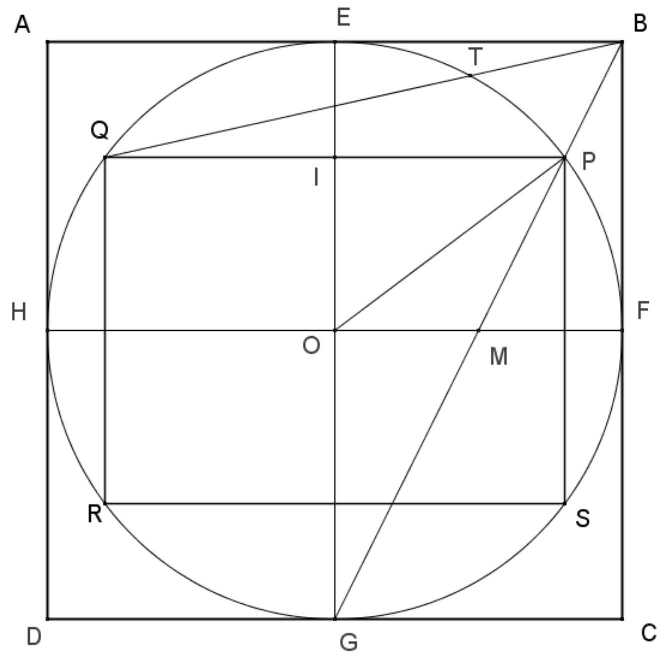
1. Les côtés d'un rectangle ont pour longueurs 3 et 4. Est-il pythagoricien ?

2. Les côtés d'un rectangle ont pour longueurs 65 et 72 est-il pythagoricien ?

3. Étant donné deux entiers naturels p et q tels que $p > q$, on considère un rectangle dont les côtés ont pour longueurs $p^2 - q^2$ et $2pq$. Est-il pythagoricien ?

4. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 1, inscrit dans un carré ABCD. On désigne par E, F, G et H les milieux de [AB], [BC], [CD] et [DA] respectivement. Le segment [BG] recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en P. On s'intéresse au rectangle PQRS, inscrit dans le cercle, dont les côtés sont parallèles à ceux du carré. On note I le milieu de [PQ].

   a. Calculer les longueurs IP et IO des côtés de l'angle droit du triangle rectangle IOP.
   b. En déduire les longueurs des côtés du rectangle PQRS.



On peut également dire qu'un rectangle, comme PQRS, dont les côtés et la diagonale ont pour mesures des quotients d'entiers est *pythagoricien.* Le point T, second point d'intersection de [BQ] avec $\mathcal{C}$, est un sommet d'un nouveau rectangle pythagoricien inscrit dans le cercle et dont les côtés sont parallèles à ceux du carré.