ACADÉMIE DE PARIS

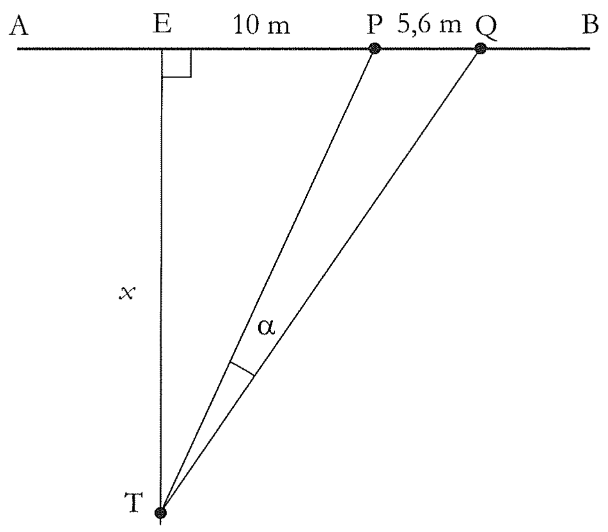
Au rugby, où le tireur doit-il déposer le ballon pour « s'ouvrir » au maximum l'angle du but ?

Sur le schéma ci-joint, le segment [AB] représente la ligne d'essai d'un terrain de rugby (marquer un essai consiste à déposer le ballon sur cette ligne ou au-delà).

Les poteaux de but sont représentés par les points P et Q.
On sait que PQ = 5,6 m.

Un essai a été marqué en E, à gauche du poteau P et à 10 mètres de celui-ci.
Transformer cet essai consiste à tirer d'un point de son choix situé sur la perpendiculaire en E à (AB) et à faire passer le ballon entre les poteaux.
On admettra que le point T, point idéal de tir, est celui pour lequel l'angle $\alpha = \widehat{PTQ}$ est maximal.

Calculer la distance x = ET pour laquelle cet angle est maximal.



Solution

Méthode 1 (Serge Ferry)

On remarque que $\widehat{PTQ} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction tangente étant strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, α est maximal si et seulement si tan α est maximale.

On a $\tan\alpha = \tan\left(\widehat{ETQ} - \widehat{ETP}\right) = \dfrac{\tan\widehat{ETQ} - \tan\widehat{ETP}}{1 + \tan\widehat{ETQ} \times \tan\widehat{ETP}} = \dfrac{\frac{15,6}{x} - \frac{10}{x}}{1 + \frac{15,6}{x} \times \frac{10}{x}}$

d'où $\tan\alpha = \dfrac{5,6x}{x^2 + 156} = f(x)$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.

On étudie les variations de f.

$$f'(x) = \frac{-5,6\left(x^2 - 156\right)}{\left(x^2 + 156\right)^2}$$

x	0		$\sqrt{156}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x) = \tan\alpha$	0	↗	Max	↘	0

$$\boxed{\alpha \text{ est maximal pour } x = \sqrt{156}}$$

Méthode 2

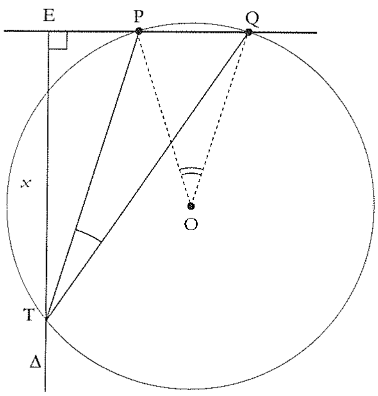


figure 1

Soit un point T arbitraire sur Δ, perpendiculaire en E à (PQ).

$\widehat{PTQ} = \frac{1}{2}\widehat{POQ}$ où O est le centre du cercle circonscrit à PTQ.

Il s'agit donc de rendre $\widehat{POQ}$ maximum, ce qui, OPQ étant isocèle, correspond au minimum du rayon.

On prendra donc le cercle tangent à Δ, T étant son point de contact (fig. 2)

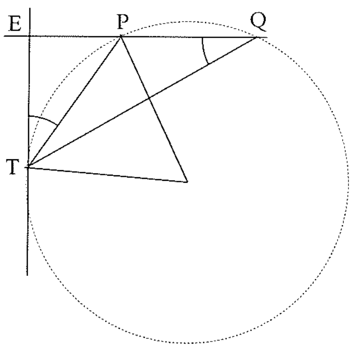


figure 2

On pourrait alors savoir (puissance d'un point par rapport à un cercle) que :

$$ET^2 = EP \times EQ = 156$$

Dans la mesure où cette notion n'est plus au programme, on obtient la relation en considérant les triangles rectangles ETP et ETQ, semblables puisque $\widehat{Q} = \widehat{ETP}$ (angles inscrits interceptant le même arc), et les rapports des côtés homologues.

Palmarès

427 inscrits (dont 117 filles) et 242 présents

Les trois premiers sont :
1- Simon NOUIS (*Premier accessit ex-aequo national*)
2- Shao Kang XIE (*Premier accessit ex-aequo national*)
3- Benoît LAMY.