Exercice n^o 3 (Section S)

Enoncé

Le but de l'exercice est de démontrer que si m est un entier naturel non nul, il existe un entier M multiple de m, tel que l'écriture de l'entier M comporte de gauche à droite une succession de 9 suivie ou non d'une succession de 0.
Le nombre M sera par exemple égal à 9 ou 99 ou 90 ou 999900, ...
1. Vérifier cette propriété pour les entiers m compris entre 1 et 6.
2. Déterminer un entier M répondant à la question dans le cas où $m = 7$.
(Indication : on pourra chercher l'écriture décimale du nombre $\frac{1}{7}10^6 - \frac{1}{7}$).
3. Déterminer un entier M répondant à la question dans le cas où $m = 84$.
4. Démontrer la propriété dans le cas d'un entier naturel non nul quelconque m.

Solution 1

1. 9 est un multiple de 1.
90 est un multiple de 2.
9 est un multiple de 3.
900 est un multiple de 4.
90 est un multiple de 5.
990 est un multiple de 6.

2. Cas $m = 7$.
La calculatrice donne $a = \frac{1}{m} = \frac{1}{7} = 0,\underbrace{142857}\ 142857$.
On a $10^6a - a = 142857$, d'où

$$999999a = 142857$$

$$999999 = 7 \times 142857$$

D'où 999999 est un multiple de 7.

3. Cas $m = 84$.
Procédons de la même manière.
La calculatrice donne $a = \frac{1}{m} = 0.01\underbrace{190476}\ 1905$. Calculons

$$\begin{aligned}
10^6\left(10^2a - 1\right) &= 190476 + \left[10^2a - 1\right] \\
\text{d'où} & \\
10^2a - 1 &= \frac{190476}{10^6 - 1} \\
a &= \frac{1}{84} = \frac{190476 + (10^6 - 1)}{10^2(10^6 - 1)} \\
84[190476 + (10^6 - 1)] &= 99999900.
\end{aligned}$$

Donc 84 divise 99999900.

4. *Cas général*

Soit m un entier naturel non nul. Le nombre $\dfrac{1}{m}$ admet une écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang. En effet quand on effectue la division, les restes successifs prennent au plus m valeurs : les entiers de 0 à $m-1$.

1^{er} cas : si l'un des restes est nul, l'écriture décimale de $\dfrac{1}{m}$ ne comporte que des zéros à partir d'un certain rang.
Supposons que les décimales soient nulles à partir du rang $p+1$. Le nombre $\dfrac{1}{m} \times 10^p$ est un nombre entier A.
On a alors $m \times A = 10^p$ d'où $m \times A \times 9 = 10^p \times 9$. Le nombre m divise $M = 9 \times 10^p$.

$2^{\text{ème}}$ cas : si aucun des restes n'est nul, la partie décimale étant périodique à partir d'un certain rang, il existe donc un entier p non nul tel que

$$\frac{1}{m} = 0, b_1 b_2 \dots b_n \underbrace{a_1 \dots a_p} a_1 \dots a_p \dots$$

D'où en procédant comme dans le cas où $m = 84$, on a en posant $a = \dfrac{1}{m}$:

$$10^p \left[10^n a - \overline{b_1 b_2 \dots b_n}\right] = \overline{a_1 \dots a_p} + 0.\underbrace{a_1 \dots a_p} a_1 \dots a_p \dots$$

Posons $A = \overline{a_1 \dots a_p}$ et $B = b_1 b_2 \dots b_n$, on a

$$\begin{aligned} 10^p[10na - B] &= A + 0.\underbrace{a_1 \dots a_p} a_1 \dots a_p \dots \\ &= A + [10^n a - B] \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (10^p - 1)[10na - B] &= A \\ 10na - B &= \frac{A}{10^p - 1} \\ 10^n a &= B + \frac{A}{10^p - 1} \\ 10^n a &= A + \frac{B(10^p - 1)}{10^p - 1} \\ a &= \frac{A + B(10^p - 1)}{10^n (10^p - 1)} \\ \frac{1}{m} &= A + B(10^p - 1) 10^n (10^p - 1) \\ 10^n (10^p - 1) &= m\left[A + B(10^p - 1)\right] \end{aligned}$$

Le nombre $A + B(10^p - 1)$ est un nombre entier, donc m divise $10^n(10^p - 1)$ qui est un entier qui s'écrit sous la forme de p « 9 »suivis de n « 0 ».

Solution 2 (Dominique Roux)

Considérons les $m+1$ nombres :

$$\begin{array}{cccccl} 9, & 99, & 999, & \ldots, & 99\ldots99 & \text{comportant} \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & m+1 & \text{chiffres } 9 \end{array}$$

Par le principe des tiroirs, deux d'entre eux, au moins, sont égaux modulo 9, soit $i = \underbrace{9\ldots9}_{i}$ et $j = \underbrace{9\ldots9}_{j}$.

Si i est le plus grand, $i - j \equiv 0 \pmod{m}$ donc $i - j$ est multiple de m.
Mais $i - j = \underbrace{9\ldots9}_{i-j}\underbrace{0\ldots0}_{j}$.