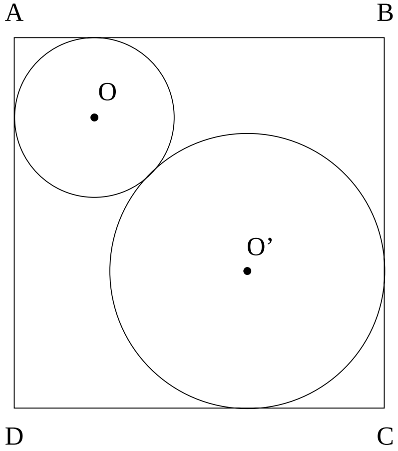
ACADÉMIE de POITIERS

ÉNONCÉ

Soit un carré $ABCD$ de coté a. Un cercle Γ intérieur au carré est tangent à (AB) et (AD). Un second cercle Γ', intérieur au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites (CB) et (CD).
Soit S la somme des aires des cercles Γ et Γ' : qu'elles sont les valeurs maximale et minimale de S ?



SOLUTION 1

Les centres O et O' des cercles étant à égale distance des côtés AB et AD pour l'un et des côté CB et CD pour l'autre, les centres des deux cercles sont situés sur la diagonale AC et les rayons r et r' des cercles vérifient

$$OA + r + r' + OC = a\sqrt{2}$$

$$(r + r')(1 + \sqrt{2}) = a\sqrt{2}$$

c'est-à-dire :

$$r + r' = a(2 - \sqrt{2})$$

Les cercles étant situés à l'intérieur d'un carré de coté a, leurs rayons restent inférieurs à $\frac{a}{2}$. On en déduit que chaque rayon appartient à l'intervalle

$$\left[a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right), \frac{a}{2}\right].$$

La somme des aires des deux cercles est

$$S = \pi\,(r^2 + r'^2)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[(r + r')^2 + (r - r')^2\right]$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\left(6 - 4\sqrt{2}\,\right)a^2 + (r - r')^2\right]$$

On en déduit immédiatement que cette aire est minimale quand $r = r' = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

et vaut alors $S_{\min} = \pi(3 - 2\sqrt{2}\,)a^2$.

Et qu'elle est maximale quand r est maximal et r' minimal (ou inversement) c'est-à-dire quand $r = \frac{a}{2}$ et $r' = a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$.

On obtient alors

$$S_{\max} = \frac{\pi}{2}\left[\left(6 - 4\sqrt{2}\,\right)a^2 + \left(-1 + \sqrt{2}\right)^2 a^2\right]$$
$$= \pi\left[\frac{9}{2} - 3\sqrt{2}\right]a^2$$

SOLUTION 2

on peut calculer S en fonction du rayon r et étudier les variations de S quand r décrit l'intervalle $\left[a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right), \frac{a}{2}\right]$.

$$S(r) = \pi\left(r^2 + r'^2\right) = \pi\left(r^2 + \left[\left(2 - \sqrt{2}\right)a - r\right]^2\right)$$
$$= \pi\left(2r^2 - \left(4 - 2\sqrt{2}\right)ar + \left(6 - 4\sqrt{2}\right)a^2\right)$$
$$S'(r) = \pi\left(4r - \left(4 - 2\sqrt{2}\right)a\right)$$

La dérivée S' s'annule pour $r = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La fonction S est donc décroissante sur l'intervalle $\left[a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right), a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{a}{2}\right]$.

La fonction S atteint son minimum en $a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et

$$S_{\min} = \pi\left[a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$
$$= \pi a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

La fonction S atteint son maximum pour $r = a\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$ ou pour $r = a/2$ et, en raison des rôles symétriques joués par les deux cercles, les valeurs atteintes pour $r = a\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$ et pour $r = a/2$ sont les mêmes et valent

$$S_{\max} = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \left[\left(2-\sqrt{2}\right)a - \frac{a}{2}\right]^2\right)$$
$$= \pi\left(\frac{9}{2} - 3\sqrt{2}\right)a^2$$

SOLUTION 3 (variante de la 1)

par Henri Bareil

La première méthode est évidemment la plus simple. Elle repose sur le constat fondamental de l'invariance de la somme $r + r'$, propriété qui conduit à faire intervenir $(r + r')$ dans $r^2 + r'^2$.
La démarche alors choisie par la méthode 1 est **excellente**.

En voici une autre, proche parente, moins du domaine des programmes, mais de portée peut-être plus générale.

$S = \pi[(r + r')^2 - 2rr']$.
Etudier la variation de S revient à étudier celle de rr', donc du *produit de deux nombres dont la somme est constannte*.

Cela relève d'un théorème (qui n'est à aucun programme, me semble-t-il, de collège ou lycées). Mais ce théorème est si simple, si facile à démontrer, d'intervention si fréquente, et si facilement mémorisable, qu'il est fort regrettable de ne pas le faire pratiquer.
S'il est connu, la conclusion est immédiate quant au maximum et au minimum de S.

Sinon, démontrons-le :
Lorsque $x + y = 2m$, constante, divers essais, géométriques, avec x et y positifs, numériques dans tous les cas, laissent présager que, par exemple, xy est maximum quand $x = y = m$.
Posons donc $x = m - d$ et $y = m + d$.
Alors : $xy = m^2 - d^2$.
De là, deux théorèmes :

Théorème : Deux nombres de somme constante ont leur produit maximum quand ils sont égaux ou qu'ils se rapprochent le plus possible de l'égalité.

Corollaire : Deux nombres de même signe et de somme constante ont leur produit minimum quand l'un d'eux vaut zéro (ce qui est évident) ou qu'il s'en rapproche le plus possible.

D'où, immédiatement, les conclusions pour notre problème d'Olympiades.

Remarques :

1 - Les théorèmes ci-dessus énoncés se démontrent d'autres façons (ainsi à partir de l'équation du second degré ou à partir d'aires de rectangles comparées à l'aire du « carré-champion » - possible dès la sixième-). La méthode ci-dessus est praticable dès que l'on sait que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ et, à partir d'exemples, conjecturer … (ce qui ne doit pas attendre la Quatrième) !).

2 - Dans notre problème d'Olympiades, il fallait faire attention au fait qu'on ne peut pas avoir $r = 0$. Cela justifie, pour sa fin, l'énoncé du corollaire).

3 - Le théorème a des interprétations fort classiques :
« Des deux rectangles de même périmètre, celui qui a l'aire la plus grande est celui qui se rapproche le plus de la forme carrée ». Etc.
Il peut se généraliser à des polygones… et, de là, à un disque qu'il fait prévaloir comme, à périmètre égal, la surface d'aire maximale…

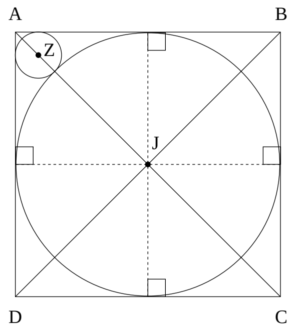
SOLUTION 4

par Henri Bareil

Soit $r \leqslant r'$ (supposition qui n'entame pas la généralité des cas)
Si r augmente (ou diminue) de d,
r' diminue (ou, respectivement, augmente) de d.

Etudier S revient à comparer les aires des deux couronnes circulaires induites par ces variations.

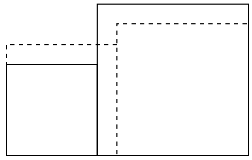
Or une couronne circulaire dont les frontières sont des cercles de rayons R et $R \pm d$, possède une aire égale à $\pi(d^2 \pm 2Rd)$.
De deux couronnes circulaires d'égale « épaisseur », celle dont l'aire est la plus grande est celle qui met en jeu les plus grands cercles.
Avec $r \leqslant r'$ on en déduit que, quand r augmente, et, donc, que r' diminue d'autant, toujours avec « nouvel $r \leqslant$ nouvel r' »,
S perd plus qu'elle ne gagne.



S est donc minimale quand $r = r'$ et S est maximale quand r' est le plus grand possible, ce qui correspond à la figure ci-contre où le cercle C' est inscrit dans le carré.

Alors $r' = a/2$. Etc.

Remarque



La somme des aires des deux disques est $\pi(r^2 + r'^2)$.

Elle varie comme $r^2 + r'^2$, qui peut figurer la somme des aires de deux carrés, par exemple disposés comme dans la figure ci-contre où les pointillés indiquent ce que perd le grand carré et ce que gagne le petit avec une variation x de valeur algébrique opposée à celle de r'. La comparaison est immédiate ! … et remplace avantageusement le travail sur les couronnes circulaires…

COMMENTAIRE GÉNÉRAL SUR LES DIVERSES MÉTHODES

La « Solution 2 », par la dérivée, fait un peu grosse artillerie. Elle n'en a pas moins son intérêt, notamment par la réduction initiale à une fonction d'une variable.

Les autres méthodes sont praticables dès le Collège. Elles permettent de réinvestir des propriétés élémentaires concernant un carré, et sa diagonale, les tangentes à un cercle, et celles issues d'un même point, l'aire d'un disque, éventuellement celle d'un carré.

Elles montrent l'intérêt des relations entre $a^2 + b^2$, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, éventuellement celui de $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Elles soulignent que, quand la traduction (ici, numérique) *de la situation aboutit à un résultat simple,* en exergue de façon inattendue, (ici $r + r'$ = constante), *il s'agit de l'exploiter* !

Voilà donc un problème élémentaire fort agréable, à divers niveaux, par les associations de pensée fondamentales mises en jeu… Un bon problème pour « apprendre », si l'on se donne la peine de dégager ce qui pilote les calculs, donc de les « penser » avant de s'y livrer…

REMARQUES DU JURY ACADÉMIQUE

1 - Sur l'ensemble de l'épreuve

« Cette année, le niveau des exercices présentés est beaucoup plus raisonnable que l'année précédente et cela s'est manifesté déjà le jour de l'épreuve où les candidats sont restés jusqu'à la fin des quatre heures.
A la correction, on constate également une meilleure adéquation entre le niveau des épreuves et celui des candidats : toutes les questions, à l'exception de la dernière question du dernier exercice, ont été abordées avec succès par plusieurs candidats ».

1 - Sur l'exercice de l'Académie

« Le point de départ de la résolution consistait à remarquer la relation algébrique simple liant les rayons des deux cercles et la longueur de la diagonale des carrés. Cette relation n'a été établie que par les meilleurs candidats.
La suite consistait alors à étudier les variations d'un polynôme du second degré sur

un intervalle convenable, à déterminer avec précision, ce qui n'a été fait que dans les meilleures copies ».

PROLONGEMENTS OU VARIANTES DE L'ÉNONCÉ

par Henri Bareil

1 - Dans l'énoncé des Olympiades, on peut remplacer la condition « cercles tangents extérieurement » par « cercles dont les centres sont à une distance donnée ».

2 - On peut remplacer les cercles par d'autres figures. Par exemple : des losanges avec une diagonale portée par [AC], un sommet commun T sur [AC] pour l'un des losances, un sommet sur [BC] pour l'autre.
Quelle condition, nécessaire et suffisante, remplissent ces losanges pour que la somme de leurs diagonales selon [AC] soit cconstante ?
[*Réponse* : il faut et il suffit qu'ils soient semblables - avec les mêmes angles pour leurs sommets respectivement sur [AB] et [BC]].
Cela étant, on peut étudier la somme de leurs aires, comme dans l'énoncé des Olympiades.

3 - On pourrait partir des cercles, construire le carré associé et s'interroger sur son aire, selon le choix des cercles, lorsque $r + r'$ est constant…(cette aire ne varie pas), puis s'interroger sur l'aire du carré non couverte par les disques…

PASSATION DE L'ÉPREUVE

Statistiques :

Centre d'épreuve	Inscrits	Présents
Angoulème	15	11
Rochefort	19	17
Niort	7	3
Poitiers	40	35
Total	**81**	**66**

Il faut noter une forte diminution du nombre de participants à cette session 2002. La difficulté des sujets de 2001 a sans doute été dissuasive, mais surtout, il semble difficile de motiver des élèves de Première pour des exercices de réflexion totalement différents de ceux qu'ils rencontrent lors de leur scolarité « classique » et cette motivation ne peut être obtenue que par leur enseignant, si celui-ci l'est déjà suffisamment.
D'autre part, si, en général, le nombre de participants est voisin du nombre des inscrits, il faut tout de même noter l'importance du nombre d'absents en Deux-Sèvres (4 absents sur 7 inscrits) due en particulier au fait que les candidats de Bressuire ne se sont pas déplacés à Niort.»

PRIX

Les 8 copies jugées les meilleures ont été classées. Voici les trois premiers lauréats :

1er prix :	*Nicolas MERCADIER*	lycée Aliénor d'Aquitaine, Poitiers
2ème prix :	*Benoît CHAUMET*	lycée M. Berthelot, Chatellerault
3ème prix :	*Laetitia BROTTIER*	lycée Camille Guérin, Poitiers