Exercice n° 3 (Série S)

Enoncé

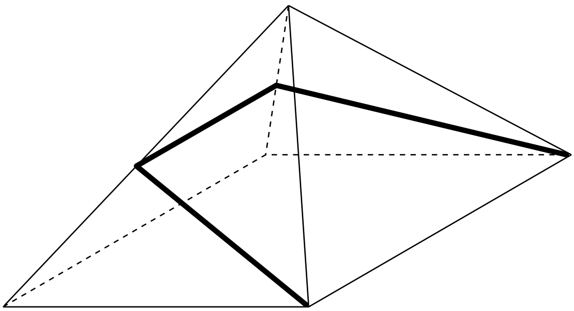
C'est l'heure du goûter ; deux amis, un artiste et un géomètre décident de s'attabler dans une pâtisserie. Ils ne commandent qu'un seul gâteau pour eux deux. Leur choix se porte sur un joli moka au café en forme de pyramide équilatère[5]. Le géomètre s'apprête à le partager équitablement en plaçant son couteau sur le sommet comme il est d'usage. L'artiste arrête alors son geste et lui propose une découpe plus originale : placer la lame sur le milieu d'une arête, parallèle à un côté de la base, puis couper en se dirigeant vers le côté opposé. Le géomètre a des doutes, les parts ne lui semblent pas égales.

---

[4] NDLR : en fait, il s'agit d'une des très nombreuses variantes du jeu de NIM parfois appelé Marienbad, par référence au film d'Alain Resnais

[5] Pyramide régulière à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux.

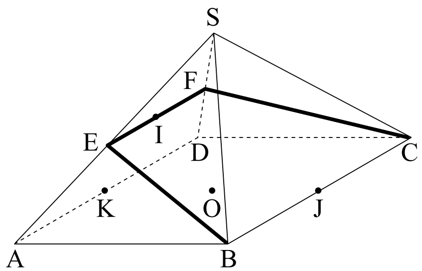
Les arêtes ont toutes pour longueur 10 cm.



1. Calculer le volume exact de cette pyramide équilatère.
2. Quelle fraction du volume de la pyramide équilatère représente effectivement le volume de la part du dessus qui a la forme d'une pyramide à base trapézoïdale ?
3. Plutôt qu'au milieu, en quel point de l'arête faudrait-il placer la lame, pour qu'en procédant de la sorte, le partage soit équitable ?

Solution (P.L.H.)

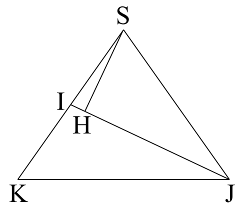
Soit A, B, C D les sommets du carré de base, S le sommet de la pyramide, J et K les milieux de $[BC]$ et $[AD]$.



1. Le carré ABCD, base de la pyramide SABCD a pour aire 100 cm^2. La hauteur $[SO]$ abaissée de S sur le centre O du carré ABCD a pour longueur h telle que $h^2 + 5^2 = SJ^2 = SB^2 - BJ^2 = 100 - 25 = 75$, d'où $h^2 = 75 - 25 = 50$ et $h = 5\sqrt{2}$.

Le volume de la pyramide est donc $\dfrac{500\sqrt{2}}{3}$ cm^3.

2. et 3.



Soit E un point du segment $[AS]$, (EF) parallèle à (AD) et F sur (DS).
Soit I le milieu de $[EF]$.

Posons $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SI}{SK} = \dfrac{EF}{AD} = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Le plan SIJ est plan médiateur à la fois de $[EF]$, $[AD]$ et $[BC]$ et il est perpendiculaire au plan EFCB. La hauteur (SH) de la pyramide SEFCB est dans ce plan et c'est aussi la hauteur du triangle SIJ. Le volume de cette pyramide est donc égal à $\dfrac{1}{3}\,SH \times IJ \times \dfrac{EF+BC}{2}$.

Mais $\dfrac{1}{2}\,SH \times IJ$ est l'aire du triangle SIJ égale aussi à la moitié du produit de SI par la hauteur issue de J. On en déduit $\dfrac{\text{aire}SIJ}{\text{aire}SKJ} = \dfrac{SI}{SK} = x$

Par ailleurs $x = \dfrac{EF}{BC}$ donc $\dfrac{\text{vol(SEFCB)}}{\text{vol(SADCB)}} = \dfrac{x(x+1)}{2}$.

Pour $x = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x(x+1)}{2} = \dfrac{3}{8} \neq \dfrac{1}{2}$,

par contre $\dfrac{x(x+1)}{2} = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $x^2+x+1 = 0$ qui, avec les conditions $0 \leqslant x \leqslant 1$ donne $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, inverse du nombre d'or ($x \approx 0,618$).