DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

Des personnes habitant des lieux différents souhaitent se rencontrer.
On cherche le lieu de rendez-vous permettant que la somme des distances entre les lieux de résidence de chaque personne et le point de rencontre soit minimale.
On représente les n personnes par n points du plan.
1- Où doit se situer le lieu de rendez-vous lorsque les n points sont alignés ?
2- Dans le cas où $n = 3$ et les trois points non alignés, où doit-il se

situer ?
3- Dans le cas où $n = 2$ et les quatre points non alignés, peut-on le déterminer ?

QUESTION 1

SOLUTION 1
1- Lieu du rendez-vous lorsque les n points sont alignés (on appellera $S(M)$ la somme des distances à partir de M.

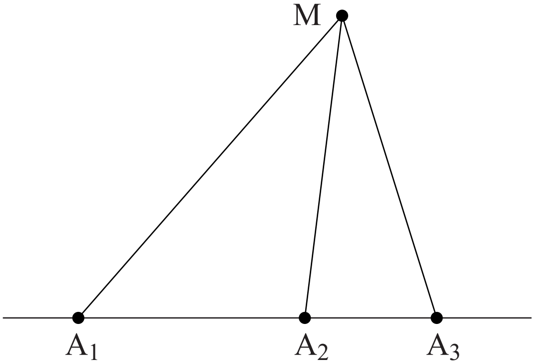
a) Cas où $n = 2$, appelons A_1 et A_2 ces deux points.
Soit M un point quelconque du plan, d'après l'inégalité triangulaire $MA_1 + MA_2 \geqslant A_1A_2$.
L'égalité n'est réalisée que quand M appartient au segment $[A_1A_2]$
Donc tout point M de $[A_1A_2]$ est solution du problème.
La somme $S(M)$ des distances parcourues vaut A_1A_2

b) Cas où $n = 3$, appelons A_1, A_2 et A_3 ces tois points rangés dans cet ordre.
D'après a), la distance minimale MA_1+MA_3 est réalisée pour tout point M du segment $[A_1A_3]$.
Choisissons M en A_2 le point "médian", la somme $S(M)$ des distances parcourues vaut A_1A_3
Donc le point A_2 est solution du problème.

3 Cas où $n = 4$, appelons A_1, A_2, A_3 et A_4 ces quatre points rangés dans cet ordre.
D'après a), la distance minimale MA_1+MA_4 est réalisée pour tout point M du segment $[A_1A_4]$, la distance minimale $MA_2 + MA_3$ est réalisée pour tout point M du segment $[A_2A_3]$.
Comme $[A_2A_3]$ est inclus dans $[A_1A_4]$, tout point de $[A_2A_3]$ (segment "médian") réalise le minimum de $S(M)$.

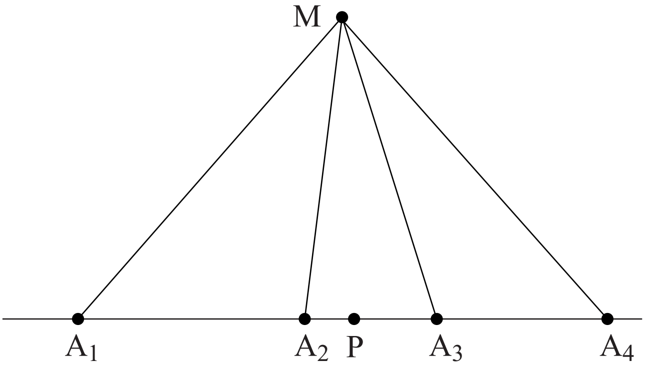
d) Cas où $n = 5$. On enlève les deux points extrêmes et on se retrouve dans la situation b).

SOLUTION 2
1- Le lieu de rendez-vous, lorsque les n points sont alignés
Commencer par le cas $n = 2$, puis :
a) Réalisons une première approche en considérant 3 points alignés A_1, A_2, A_3 et M un point du plan.



On considère la somme $S_3(M) = MA_1 + MA_2 + MA_3$ et on cherche le ou les point(s) P qui réalise(nt) le minimum.
Or, pour tout point M, on a par l'inégalité triangulaire : $MA_1 + MA_3 \geqslant A_1A_3$. Il n'y a égalité que si M appartient au segment [$\mathrm{A_1A_3}$] ret donc $S_3(M) \geqslant A_1A_3 + MA_2$.

b- Considérons maintenant 4 points alignés $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{A_4}$ et un point M du plan.



En appliquant deux fois l'inégalité triangulaire à

$$S_2(M) = MA_1 + MA_2 + MA_3 + MA_4,$$

on obtient $S_4(M) \geqslant A_1A_4 + A_2A_3$.
Pour tout point P compris entre $\mathrm{A_2}$ et $\mathrm{A_3}$,

$$S_4(P) = PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 = A_1A_4 + A_2A_3$$

donc $S_4(M)$ est minimale pour tout point du segment [$\mathrm{A_2A_3}$].

c- Il y a donc deux situations à considérer suivant la parité du nombre de points.

- **Cas de $2p + 1$ points** notés A_1, A_2, $\dots A_p$, A_{p+1}, A_{p+2},$\dots A_{2p}$, A_{2p+1} et rangés dans cet ordre, sans perdre de la généralité de la démonstration. En particularisant le point A_{p+1} et en regroupant les longueurs MA_1 et $MA_{2(p+1)-i}$, on obtient :
$$S_{2p+1}(M) \geqslant A_1A_{2p+1} + A_2A_{2p} + \cdots + A_pA_{p+2}$$
or $$S_{2p+1}(A_{p+1}) = A_1A_{2p+1} + A_2A_{2p} + \cdots + A_pA_{p+2}$$
Ainsi, le point A_{p+1} réalise le minimum.
- **cas de $2p$ points** notés A_1, A_2, $\dots A_p$, A_{p+1}, A_{p+2},$\dots A_{2p}$. En raisonnant de la même façon que précédemment, on voit que pour tout point P compris entre A_p et A_{p+1}, on a
$$S_{2p}(P) = A_1A_{2p} + A_2A_{2p} + \cdots + A_pA_{p+2}$$
ce qui correspond au minimum.

En conclusion :
- Si le nombre de points est impair, le lieu de rendez-vous doit être le point central A_{p+1}
- si le nombre de points est pair, le lieu de rendez-vous peut être n'importe quel point situé sur le segment $[A_p, A_{p+1}]$.

AUTRE PRÉSENTATION par F. Lo Jacomo

Numérotons les points A_1, A_2, $\dots$, A_n dans l'ordre où ils se suivent sur la droite.
Si $n = 2k$, le lieu de rendez-vous doit se situer n'importe où sur le segment $[A_kA_{k+1}]$, et si $n = 2k - 1$, il doit se situer en A_k. En effet, si A, B et M sont trois points quelconques, $MA + MB \geqslant AB$ (inégalité triangulaire) et l'égalité est vérifiée si et seulement si M appartient au segment [AB].
Donc si $n = 2k$, pour tout point M du plan, voire de l'espace,
$$(MA_1 + MA_{2k}) + (MA_2 + MA_{2k-1}) + \cdots + (MA_k + MA_{k+1})$$
$$\geqslant A_1A_{2k} + A_2A_{2k+1} + \cdots + A_kA_{k+1}$$
et l'égalité est vérifiée si et seulement si M est intérieur à tous les segments $[A_1A_{2k}]$,$\dots$ $[A_kA_{k+1}]$, donc, de la manière dont les points ont été numérotés, si et seulement si M est sur le segment $[A_kA_{k+1}]$.
Si $n = 2k - 1$, la somme des distances

$$(MA_1 + MA_{2k}) + (MA_2 + MA_{2k-1}) + \cdots + (MA_k + MA_{k+1}) + MA_k$$

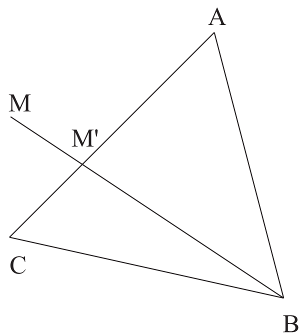
$$\geqslant A_1A_{2k-1} + + \cdots + A_{k-1}A_{k+1} + MA_k$$

est minimale si M appartient au segment $[\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+1}]$ (donc à tous les segments $[\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{2k+i}]$) et si en outre MA_k est minimal, donc nul.

QUESTION 2

avec trois points A, B, C non alignés

ETUDE PRÉLIMINAIRE



Pour tout point M extérieur au triangle, par exemple, tel que M et B soient de part et d'autre de la droite (AC), en désignant par M' l'intersection de (AC) et [MB].

$$MA + MC \geqslant AC \text{ et } AC = M'C + M'A \text{ et donc } S_3(M) \geqslant S_3(M')$$

Le ou les point(s) recherché(s) sont donc à l'intérieur du triangle ABC (au sens large car les points peuvent être sur le triangle).

Variante (par F. Lo Jacomo)

Supposons que le point cherché, M, soit extérieur au triangle ABC, par exemple dans le demi-plan de frontière (AC) qui ne contient pas B. Soit N le symétrique de M par rapport à (AC). Alors $NA+NC = MA+MC$ et $NB < MB$ vu que N et B sont d'un même côté de la médiatrice (AC) de [MN].

Donc $NA+NB+NC < MA+MB+MC$ et M ne saurait être le point

cherché. A, B, C jouant le même rôle, la démonstration précédente est générale.
cela étant :

SOLUTION 1 (classique, rédigée par Henri Bareil)
Soit $S_3(M) = MA + MB + MC$.
Utilisons une propriété du triangle équilatéral qui permet, par exemple, de détacher la longueur MA de A pour obtenir une somme $S_3(M)$ formée des longueurs de trois segments consécutifs.
Utilisons (Cf. figure page suivante) la rotation $\mathcal{R}$(A, 60°) qui envoie C en E tel que ACE soit extérieur à ABC.
Alors M $\rightarrow$ D tel que $MA = MD$.
D'où $MA + MB + MC = MB + MD + DE$.
Si donc, B, M, D, E **peuvent** être alignés dans cet ordre, cela fournit le minimum, BE de $S_3(M)$.
Même raisonnement, à partir de AFB équilatéral extérieur au triangle ABC, pour une solution sur [CF].
Mais M peut-il être sur [BE] et [CF] ?
Pas si l'un des angles du triangle ABC est supérieur (strictement) à 120°, auquel cas l'un au moins des segments [BE] et [CF] est extérieur au triangle ABC et ne saurait donc porter un point M solution. On lira, plus loin, ma remarque 3, puis la solution alors proposée par F. Lo Jacomo.
(Remarque : si l'un des angles de ABC vaut 120°, pour le minimum, M est au sommet de cet angle.)
Continuons le cas où tous les angles du triangle ABC sont inférieurs à 120°
Soit M l'intersection de [BE] et [CF], intérieure à ABC. $S_3(M)$ est alors minimum, égale à BE ou CF.

Remarques :

1- $BE = CF$, du seul fait que ce minimum ne peut avoir qu'une seule valeur !
Autrement : [BE] et [CF] se correspondent dans chacune des rotations (A ; 60°) donc $BE = CF$.
De plus, cela indique que $\widehat{\text{BMC}} = 120°$.

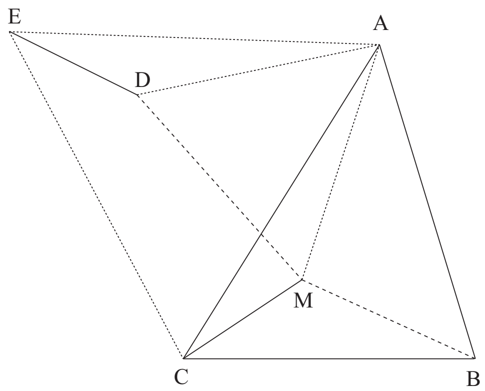
2- Les sommets du triangle ABC jouant le même rôle, on a, de même $\widehat{\text{BMA}} = \widehat{\text{CMA}} = 120°$.
Et, avec un segment [AK] analogue à [BE] et [CF], $AK = BE =$

CF, les trois segments concourants en M, pour le minimum.

3- Dans le cas où $\widehat{\text{BAC}} > 120^o$, $\widehat{\text{EAB}} < 180^o$ et $ED + DM + MB$ minimal (ainsi que l'analogue avec [CF] avec M intérieur à ABC, ne peut se produire que pour M en A.

Etude analogue pour $\widehat{\text{ABC}}$ >120° ou $\widehat{\text{ABC}} = 120^o$.

VARIANTE En parlant moins de rotation (Equipe de Rennes).



L'idée retenue est toujours de transformer la somme $S_3(M)$ en une somme de longueurs de segments « consécutifs ».

On prend un point M à l'intérieur du triangle ABC. On construit le point D tel que MAD soit un triangle équilatéral tel que [MD] et [AC] soient sécants. On construit ensuite le point E dans le demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas B de sorte que CAE soit un triangle équilatéral.

Les triangles MAC et DAE sont isométriques :

par construction, on a

- pour les longueurs, $AC = AE$ ainsi que $AM = AD$.
- pour les angles, $\widehat{\text{MAD}} = \widehat{\text{CAE}} = 60^o$

et donc $\widehat{\text{MAC}} + \widehat{\text{CAD}} = \widehat{\text{CAD}} + \widehat{\text{DAE}}$ d'où $\widehat{\text{MAC}} = \widehat{\text{DAE}}$.

On en déduit que $MC = ED$.

On peut alors remplacer la somme $S_3(M)$ par la somme $S_3'(M) = ED + DM + MB$. Or $S_3'(M)$ est minimale si les points E, D, M et B sont alignés dans cet ordre. On retrouve alors la discussion précédente ...

Etc.

SOLUTION DE F. LO JACOMO

Utilisons un lemme : si A'BC est un triangle équilatéral, quel que soit le point M du plan, $MA' \leqslant MB + MC$, et l'égalité est vérifiée si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à A'BC et l'angle $\widehat{\mathrm{BMC}}$ égal à $\dfrac{2\pi}{3}$, soit 120°. En effet, la rotation de centre A' et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, qui transforme C en B, transforme M en un point M' tel que A'MM' soit un triangle équilatéral. On a donc, d'une part $BM' = CM$, d'autre part $MA' = MM' \leqslant MB+BM' \leqslant MB+MC$. L'égalité $MM' = MB+BM'$ est vérifiée si et seulement si B est sur le segment [MM'], donc si les angles $\widehat{\mathrm{ABM}}$ et $\widehat{\mathrm{ABM'}} = \widehat{\mathrm{ACM}}$ sont supplémentaires, ce qui siognifie d'une part que A', B, C, M sont cocycliques, d'autre part que B et C sont de part et d'autre de (AM'), donc A' et M de part et d'autre de (BC), donc que les angles $\widehat{\mathrm{BA'C}} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\widehat{\mathrm{BMC}}$ sont supplémentaires.

Ce lemme prouvé, soit ABC un triangle quelconque. Prouvons pour commencer que le point solution (qui minimise $MA+MB+MC$) est intérieur (au sens large) au triangle ABC. En effet, si M était extérieur, soit M et A seraient de part et d'autre de (BC), soit M et B seraient de part et d'autre de (CA) soit M et C seraient de part et d'autre de (AB). Supposons M et A de part et d'autre de (BC) et appelons M' le symétrique de M par rapport à (BC). Il est clair que $M'B + M'C = MB + MC$ et que $M'A < MA$, vu que M' et A sont du même côté de la médiatrice (BC) de [MM']. Donc $M'A+M'B+M'C < MA+MB+MC$: contradiction.

Si les trois angles du triangle ABC sont inférieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$, on utilise le lemme : construisons sur le côté [BC], extérieurement au triangle ABC, un triangle équilatéral A'BC.
Pour tout point M du plan, $MA+MB+MC \geqslant MA+MA' \geqslant AA'$. Or il existe un et un seul point du plan tel que $MA+MB+MC = AA'$: ce point est nécessairement la solution qui minimise la somme des distances. Il doit vérifier $MA+MA' = AA'$ (il doit donc être sur le segment [AA']) ainsi que $MB + MC = AA'$ (il doit donc être sur le cercle circonscrit à A'BC, sur l'arc BC ne contenant pas A'). L'arc coupe bien le segment car les angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ sont inférieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$, donc A est dans le secteur angulaire $\widehat{\mathrm{BA'C}}$, et l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ est inférieur à $\dfrac{2\pi}{3}$, donc A est extérieur au cercle. Ce point d'intersection voit le segment [BC] sous un angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et, étant donné les propriétés de l'angle inscrit, il voit les segments [A'B] et

[A'C] sous des angles égaux à $\frac{\pi}{3}$, donc il voit les trois côtés du triangle ABC sous des angles $\frac{2\pi}{3}$, ce qui lui vaut le nom de *point isogone*. Il est clair que, si au lieu de construire sur [BC] le triangle équilatéral A'BC, on avait construit sur [AC] le triangle équilatéral AB'C ou sur [AB] le triangle équilatéral AC'B, on aurait obtenu le même point (puisque ce point est la solution d'un problème pour lequel A, B et C jouent des rôles symétriques) : le point qui voit les trois côtés du triangle sous des angles $\frac{2\pi}{3}$ est l'intersection des trois droites (AA'), (BB'), (CC'). On l'appelle traditionnellement *point de Torricelli* du triangle.

Si l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$, on construit sur [AB] et [AC] deux triangles équilatéraux ABC' et ACB' extérieurs au triangle ABC. L'hypothèse sur l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ se traduit par le fait que A est intérieur aux deux triangles B'BC et C'CB. M, que l'on supposera distinct de A, doit être intérieur au sens large au triangle ABC, et doit donc être strictement intérieur à l'angle $\widehat{\mathrm{AB'C}}$ ou strictement intérieur à l'angle $\widehat{\mathrm{AC'B}}$ (ou strictement intérieur aux deux) : Supposons-le strictement intérieur à $\widehat{\mathrm{AB'C}}$, donc A strictement intérieur au triangle BMB'. La droite (BA) recoupe le segment [MB'] en A'. $MA + MB + MC \geqslant MB + MB' = (MB+MA')+A'B' > A'B+A'B' = AB+(AA'+A'B') > AB+AB' = AB + AC$. C'est donc le point A qui minimise la somme des distances à A, B et C, car, pour tout autre point M intérieur au sens large à ABC, $MA + MB + MC > AA + AB + AC$.

COMMENTAIRES POUR CETTE QUESTION 2

1-Ce problème célèbre, connu sous le nom de *« problème de Fermat »* conduit, lorsque ABC a tous ses angles inférieurs à 120°, au *« point de Fermat »* ou *« point de Torricelli »*.
Il est traité dans diverses brochures APMEP, dans le PLOT (APMEP) n° 3, page 4 (pour les angles inférieurs à 120°), et dans « La géométrie du triangle » de Y. et R. SORTAIS, pages 200 à 209.

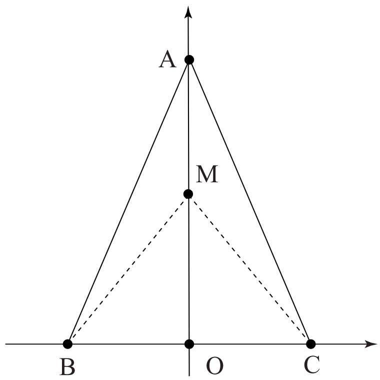
2- de l'équipe académique
L'objectif de cet exercice, difficile, n'est pas d'obtenir une réponse mathématique rigoureuse mais de tester les capacités d'initiative des candidats face à un problème inhabituel et dont les réponses sont loin d'être évidentes.

N.D.L.R. : Réactions des candidats ?

3- de l'équipe « brochure » :
Les lycéens devraient savoir que, pour étudier une somme de longueurs, il est souvent utile d'essayer de la former avec des segments bout à bout (remarque analogue pour des aires et des volumes). Mais, comment faire ? (sauf si l'on a déjà étudié ce problème !). Ce n'est pas immédiat si l'on n'a pas l'habitude de la rotation et de ses propriétés...
De plus, si le cas où tous les angles sont inférieurs à 120° se prête bien à cette méthode, nous voilà désemparés dans le cas où l'un d'eux dépasse 120° !
D'autant qu'ayant traité le problème avec des angles inférieurs à 120° et l'intersection de [BE] et [CF] on peut ne pas voir qu'on ne se défaussera pas du cas $\widehat{\mathrm{BAC}} > 120°$ en disant « changeons le choix des angles de travail et ramenons-nous à des rotations autour du sommet d'angle inférieur à 120° ».
Il serait donc raisonnable de se limiter, d'abord, au cas où tous les angles sont inférieurs à 120° et de voir ensemble, en classe, en quoi cela coince, et comment cela se résout, lorsqu'il n'en va pas ainsi.

4- d'André Guillemot
Partant de la difficulté du cas général, notre collègue propose ceci :
Je suggère de modifier cette question de la façon suivante : « ABC isocèle de sommet A », plus à la portée d'un élève de première et qui permet déjà d'entrevoir les différents cas pour un triangle quelconque.

Démonstration
On place le triangle isocèle dans un repère orthonormé tel que les sommets aient pour coordonnées B$(-1\,;\,0)$, C$(1\,;\,0)$ et A$(0\,;\,s)$ avec $s > 0$.
Par raison de symétrie le point M recherché est sur l'axe des ordonnées, soit y son ordonnée ($y > 0$).



Supposons qu'il soit à l'intérieur du triangle ABC :

$$MA + MB + MC = 2\sqrt{1+y^2} + s - y = f(y)$$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{4y^2 - 1 - y^2}{\sqrt{1+y^2}\,(2y + \sqrt{1+y^2})} \\ &= \frac{3y^2 - 1}{\sqrt{1+y^2}\,(2y + \sqrt{1+y^2})} \end{aligned}$$

Comme $y \geqslant 0$, $f'(x) = 0$ si $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $f'(y) > 0$ si $y > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

On constate donc que si $s \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, le point M recherché est indépendant de s et que l'angle $\widehat{\mathrm{BMC}} = 120^{\mathrm{o}}$ car $\tan(\widehat{\mathrm{OMC}}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Examinons le cas où $s < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Nous avons alors $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + y - s$ définie pour $y \geqslant s$.

$f'(y) = \dfrac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + 1$. $f'(y)$ est positive sur son domaine de définition, donc f est croissante.

$f(y)$ sera minimale pour $y = s$, le point M sera alors le point A.

Conclusion

Si ABC est un triangle isocèle dont l'angle au sommet A vaut moins de 120^{o}, le point M recherché est le point de l'axe du triangle sous lequel on voit les trois côtés sous un angle de 120^{o}. Dans l'autre cas, M est en A.

QUESTION 3 (cas de quatre points A, B, C, D non alignés)

SOLUTION 1 (d'André Guillemot)

A) On peut former un quadrilatère convexe avec les quatre points (ABCD ce quadrilatère)

$MA + MC$ est minimale pour tout point de [AC]

$MB + MD$ est minimale pour tout point de [BD].

Appelons P l'intersection des diagonales donc $PA + PB + PC + PD$ est minimale.

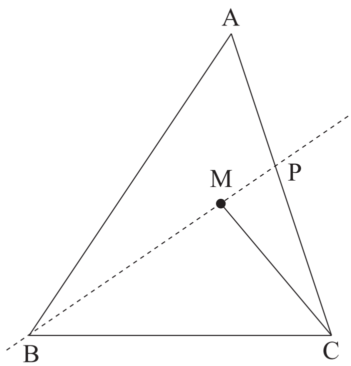
Le point recherché est donc le point de concours des diagonales

B) L'enveloppe convexe des points A, B, C et D est un triangle (par exemple le sommet D est à l'intérieur du triangle ABC).

Pour la démonstration, on va se servir plusieurs fois d'une conséquence de l'inégalité triangulaire, à savoir :

Si M n'est pas à l'extérieur du triangle ABC, alors $MB+MC \leqslant AB+AC$ *(1)*

Démonstration de cette propriété :



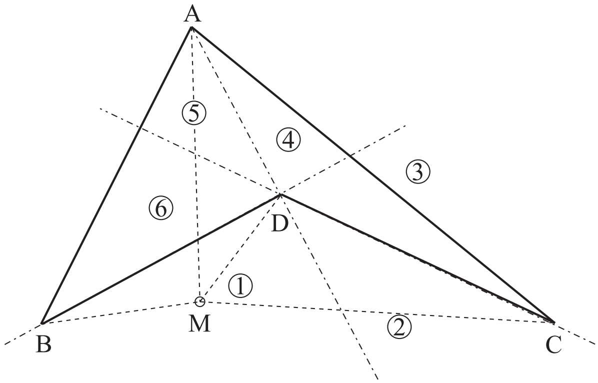
Appelons P l'intersection de (BM) et de (AC).

$BA + AC = BA + AP + PC$, $(BA + AP) + PC \geqslant BP + PC$ (inégalité triangulaire)

$BP + PC = BM + MP + PC$, $BM + (MP + PC) \geqslant BM + MC$ (inégalité triangulaire)

D'où $BA + AC \geqslant BM + MC$.

Les droites (DA), (DB) et (DC) partagent le plan en six zones numérotées de 1 à 6. On appellera $S(M)$ la somme des distances $MA + MB + MC + MD$.



a) Si M est dans la zone 1
$S(M) = MA + MB + MC + MD = (MB + MD) + (MA + MC)$
$MB + MD \geqslant DB$ (inégalité triangulaire)
$MA + MC \geqslant DA + DC$ (à cause du (1)).
D'où $S(M) \geqslant DB + DA + DC$.
Donc pour tout point M de la zone 1, $\boxed{S(M) \geqslant S(D)}$.

b) Si M est dans la zone 2.
$S(M) = MA + MB + MC + MD = (MA + MB) + (MC + MD)$
$MC + MD \geqslant DC$ (inégalité triangulaire)
$MA + MD \geqslant DA + DB$ (à cause du (1)).
D'où $S(M) \geqslant DB + DA + DC$.
Donc pour tout point M de la zone 2, $S(M) \geqslant S(D)$.

En parcourant ainsi toutes les zones, $MA + MB + MC$ va se partager en deux parties, l'une qu'on pourra minorer par l'inégalité triangulaire, l'autre par l'inégalité (1).
On aura toujours $\boxed{S(M) \geqslant S(D)}$.

En conclusion : **Dans ce cas, le point recherché sera le point D à l'intérieur du triangle.**

C) ABCD est un quadrilatère croisé,
par exemple avec [AB] et [CD] sécants, nous sommes ramenés au cas A)

avec le quadrilatère ACBD. *Le point recherché est lepoint de concours des côtés [AB] et [CD].*

COMMENTAIRES SUR CETTE QUESTION (équipe brochure)

Ici encore, ce n'est pas facile : on risque d'oublier un cas ! Et seuls les A et C (réunis par F. Lo Jacomo sous la définition : on peut former un quadrilatère convexe avec les quatre points) sont faciles.

COMMENTAIRE GÉNÉRAL DU SECOND SUJET ACADÉMIQUE (équipe brochure)

Un beau thème de recherche et d'étude à la maison, avec des aller-retour prof-élèves pour affiner peu à peu, en disant aux élèves que défricher un peu... c'est déjà beaucoup !