OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

ACADEMIE DE STRASBOURG

Mercredi 12 mars 2008

CLASSE DE PREMIERE
TOUTES SECTIONS SAUF S

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants
Les calculatrices sont autorisées
L'énoncé comporte trois pages

Exercice 1 :

Les carrés et les cubes

On écrit tous les entiers de 1 à 2008 qui ne sont ni des carrés ni des cubes d'entiers.

Combien en écrit-on ?

Exercice 2 :

Les balles de tennis

On dispose de n balles de tennis identiques à répartir entre trois joueurs : Paul, Henri et Mathieu. Un joueur peut ne recevoir aucune balle.

1. Déterminer le nombre de répartitions différentes possibles dans les cas $n=3$ puis $n=4$.

2. Déterminer le nombre de répartitions différentes possibles dans le cas général.

Exercice 3 :

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

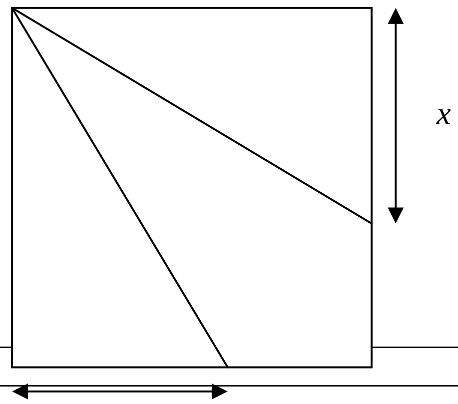
$2=1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3=1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq 1$; $3=1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n+2$ et $2n+9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

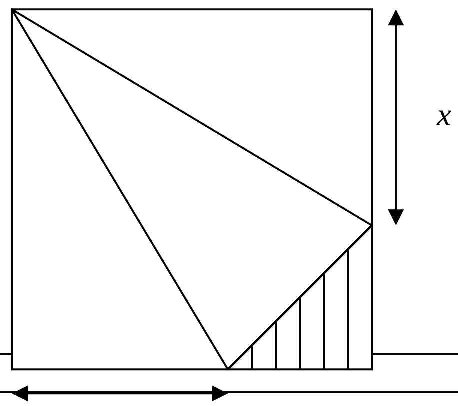
<u>Exercice 4 :</u>

Un partage équitable



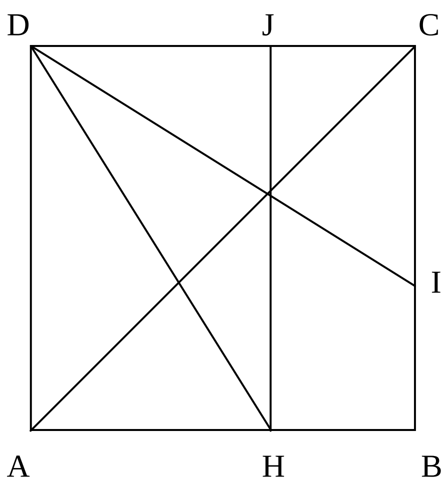
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

ACADEMIE DE STRASBOURG

Mercredi 12 mars 2008

CLASSE DE PREMIERE
SECTION S

Durée : 4 heures

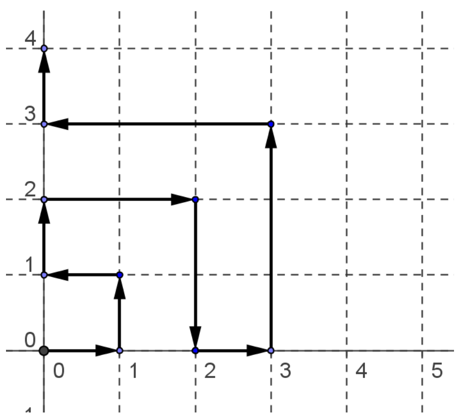
Les quatre exercices sont indépendants
Les calculatrices sont autorisées
L'énoncé comporte trois pages

Exercice 1 :

Les déplacements sur un réseau

Une fourmi se déplace à vitesse constante de 1 cm par seconde.

Elle se déplace comme indiqué sur le schéma ci-contre, partant de (0 ; 0) et visitant tous les points (*a ; b*) à coordonnées entières positives ou nulles.



1. Combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre ainsi les points (3 ; 0) , (4 ; 0) , (4 ; 4) et (5 ; 5) ?

2. Si p désigne un entier naturel, combien de temps lui faudra-t-il pour passer du point ($2p$; 0) au point ($2p + 2$; 0) ?

3. Si p désigne un entier naturel, combien de temps lui faudra-t-il pour passer du point ($2p + 1$; 0) au point ($2p + 3$; 0) ?

4. Si n désigne un entier naturel, combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre le point (n ; 0) ? le point (n ; n) ?

5. Où se trouvera la fourmi au bout de 2008 secondes ?

Exercice 2 :

Les triplets

On part d'un triplet de réels de réels (a, b, c) que l'on transforme en $(a+b, b+c, c+a)$. On recommence cette opération indéfiniment.

Par exemple avec (1 , 3 , - 4) on obtient successivement (4 , - 1 , - 3) , (3 , - 4 , 1) , (- 1 , - 3 , 4) , (- 4 , 1 , 3) , (- 3 , 4 , - 1) , (1 , 3 , - 4) qui est le triplet initial, et le processus est donc périodique.

Déterminer à quelle condition portant sur a , b et c le processus est périodique et préciser alors le nombre d'étapes nécessaires pour retomber sur le triplet initial (a, b, c) .

Exercice 3 :

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

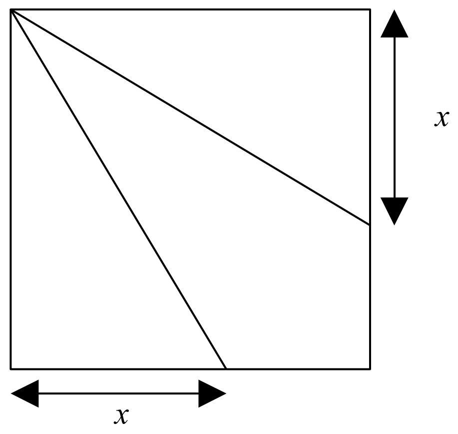
$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

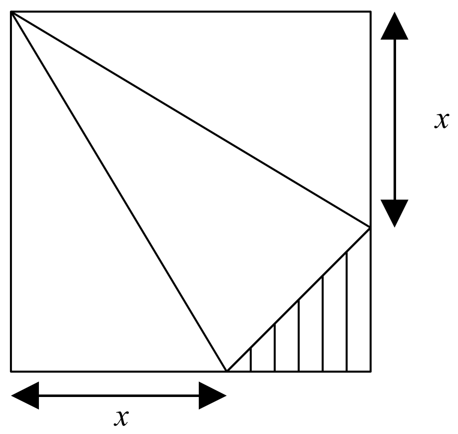
Exercice 4 :

Un partage équitable



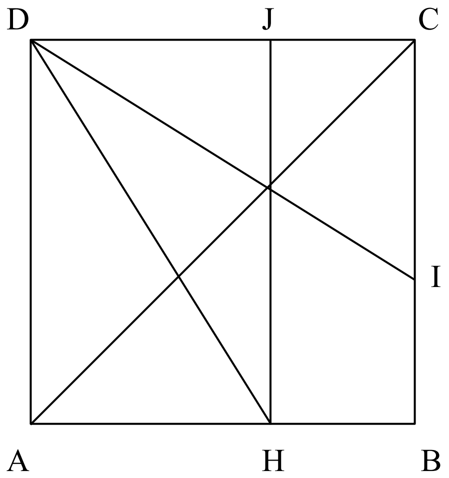
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?