Olympiades académiques de mathématiques

Session 2017

Classes de Première

Mercredi 15 mars de 10 heures 10 à 12 heures 10

EXERCICES PROPOSES PAR l'ACADEMIE

***Avertissement** :*

• Le sujet comporte quatre pages et une feuille annexe pour figures.

• Veiller à informer précisément les entêtes, numéro et nombre de pages sur chaque copie.

• Les candidats élèves de la série S. doivent traiter les exercices 1 et 3 ;
les candidats élèves des autres séries doivent traiter l'exercice 1 (sauf la partie B) et l'exercice 2.

• Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

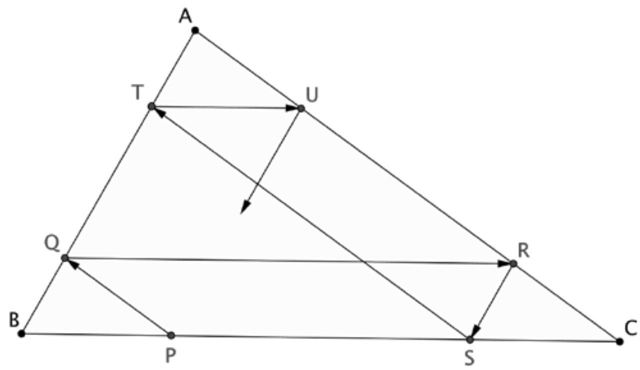
• Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Et partenaires en Midi-Pyrénées : Région, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes, Institut de Mathématiques de Toulouse, Département de Mathématiques, Institut National des Sciences Appliquées, Ecole Normale Supérieure de Paris, Palais de la Découverte, Ecole Nationale de l'Aviation Civile, Université Paul Sabatier, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, Ecole d'Economie de Toulouse, Délégation régionale CNRS, Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse School of Economics-Research, AIRBUS Defense and Space, Centre National d'Etudes Spatiales, Cité de l'Espace, Science Animation, Union Régionale des Ingénieurs et Scientifiques de Midi Pyrénées, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Association *femmes et mathématiques*.

Exercice 1 (partie A tous candidats ; partie B uniquement les candidats élèves en série scientifique)
« Promenades parallèles »

Partie A – pour tous les candidats : *Dans le triangle*

On considère un triangle ABC. P est un point du segment [BC] non confondu avec B et C.
M est un point mobile qui se déplace à l'intérieur du triangle.
M part du point P.
M effectue un premier déplacement parallèlement à la droite (AC) jusqu'au point Q de [AB], puis un deuxième déplacement parallèlement à la droite (BC) jusqu'au point R de [AC] et ainsi de suite.
La figure ci-contre donne une ébauche du début du parcours du point M : de P à Q, puis R, puis S, puis T, puis U …



1) a) Tracer un triangle ABC quelconque. Placer le point P de [BC] tel que BP = $\frac{1}{5}$ BC.
Représenter les six premiers déplacements rectilignes du point M.
b) Tracer un nouveau triangle ABC quelconque. Placer le point P de [BC] tel que BP = $\frac{1}{3}$ BC.
Représenter les six premiers déplacements rectilignes du point M.

2) *Après six déplacements rectilignes, le point M semble rejoindre sa position initiale*.
Existe-t-il une position initiale P pour laquelle M rejoint sa position initiale en moins de six déplacements ? Justifier la réponse.

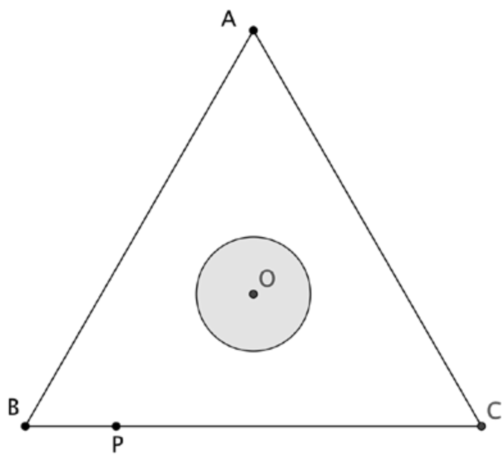
3) a) Démontrer que le point M rejoint sa position initiale après six déplacements dans le cas illustré par la figure donnée (ci-dessus) où BP = $\frac{1}{4}$ BC
b) Peut-on généraliser cette démonstration quelle que soit la position du point P ?
c) Après 2017 déplacements, où se trouve le point M ?

On appelle désormais ***trajet du point M*** les six premiers déplacements rectilignes du point M.

4) On appelle p le périmètre du triangle ABC.
Déterminer en fonction de p l'expression de la longueur du ***trajet du point M***.

Partie B – pour les candidats élèves de la série S. uniquement : *Atteindre la cible ?*

On considère un triangle équilatéral ABC de côté 1.
On place une cible circulaire de rayon r et de centre O, point d'intersection des médiatrices du triangle ; le cercle bord de la cible fait partie de la cible.



1) Dans cette question P est le point de [BC] tel que BP = $\frac{1}{5}$ BC.

a) Si $r = \frac{1}{10}$, est ce que le point M rencontre la cible au cours de son trajet ? Justifier.

b) Quelle est la valeur minimale du rayon r pour laquelle le point M rencontre la cible au cours de son trajet ?

2) Dans cette question, P est un point de [BC], non confondu avec B et C, que l'on choisit au hasard.
Déterminer en fonction de *r* la probabilité que le point M rencontre la cible au cours de son trajet.

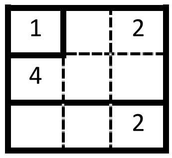
Exercice 2 (candidats élèves des séries autres que la série S.) – « Tectonic »

Le jeu Tectonic est un jeu de grille, un peu comme le sudoku.
Une grille de Tectonic a neuf cases disposées en trois lignes et trois colonnes ; elle est composée de zones de **1 à 5 cases** entourées de traits gras. L'objectif est de compléter la grille avec les chiffres manquants sachant que :

- Une zone d'une case contient forcément le chiffre 1, une zone de deux cases contient exactement les chiffres 1 et 2, et ainsi de suite …, une zone de 5 cases contient exactement les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5.
- Deux chiffres identiques ne peuvent être placés dans deux cases ayant en commun un côté ou un sommet.

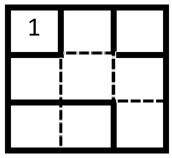
Partie 1 : Des exemples

1) Reproduire et compléter la grille n°1 ci-contre en respectant les règles du Tectonic.



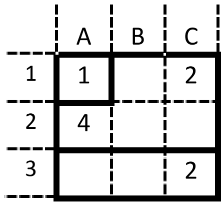
Grille n°1

2) Proposer une solution pour la grille n°2 ci-contre. Est-ce la seule ?

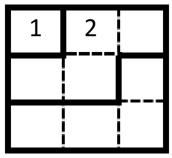


Grille n° 2

Pour la suite, vous pouvez si vous le souhaitez (ce n'est pas une obligation), désigner les cases par A1, A2, etc … selon le schéma ci-contre où le nombre 4 est positionné en A2.

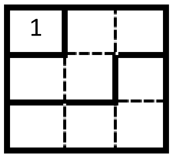


3) a) Expliquer pourquoi il n'y a pas de solution pour la grille n°3 ci-contre.

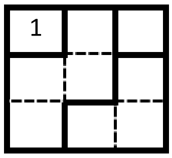


Grille n° 3

3) b) Qu'en est-il des grilles n°4 et n°5 ci-contre ?



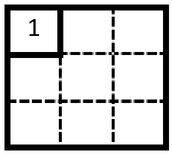
Grille n° 4



Grille n° 5

On appelle **grille possible** une grille pour laquelle il existe des solutions.
Ainsi la grille n° 2 est une grille possible et la grille n° 3 n'est pas une grille possible.

On cherche désormais les grilles possibles que l'on peut fabriquer à partir de la grille de base ci-contre. On cherche donc quels sont les traits épais que l'on peut ajouter.
Toutes les grilles présentées auparavant ont été construites de cette façon.



Grille de base

Partie 2 : Des grilles dont la plus grande zone comporte 4 cases.

On cherche les grilles possibles que l'on peut fabriquer à partir de la grille de base et dont la plus grande zone comporte 4 cases.

1) Expliquer pourquoi le nombre écrit dans le carré central (en B2) doit être un 4.
2) Expliquer pourquoi les grilles possibles comportent exclusivement, en plus de la zone se réduisant à la case A1, une zone de 4 cases, une zone de 3 cases et une zone de 1 case.
3) Il y a exactement six grilles possibles fabriquées à partir de la grille de base et comportant une zone de 4 cases. **Tracer** ces six grilles et proposer **une** solution pour chacune d'elle.

Exercice 3 (candidats élèves en série S.) – « Parachute»

Des parachutistes choisissent d'atterrir en plein milieu d'une forêt au point A à 10 km à l'Ouest d'une source S.

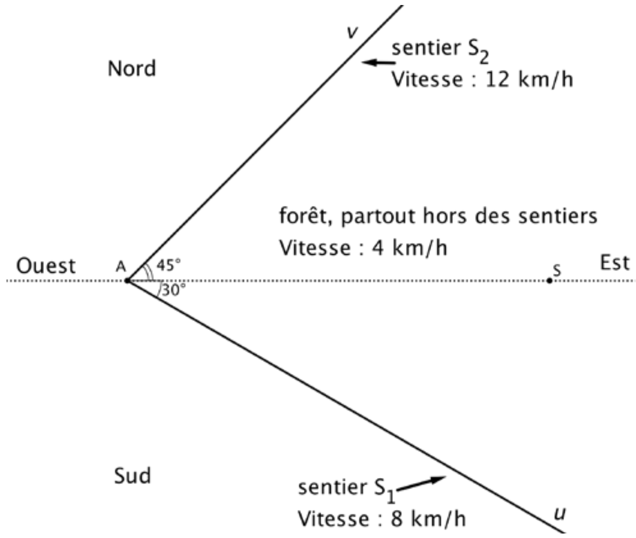
Du point A partent deux sentiers rectilignes S_1 et S_2.

Le sentier S_1, représenté par la demi-droite [Au), est orienté vers le Sud-Est et l'angle $\widehat{SAu}$ mesure 30°.

Le sentier S_2, représenté par la demi-droite [Av), est dirigé vers le Nord-Est et l'angle $\widehat{SAv}$ mesure 45°.

Sur le sentier S_1, les parachutistes peuvent avancer à la vitesse maximale de 8 km/h et sur le sentier S_2 à la vitesse maximale de 12 km/h.

Dans la forêt, leur progression est limitée à 4 km/h.



Partie A - Recherche de la zone de la forêt atteinte en 1 heure de marche

1) La figure 1 (sur feuille annexe) reproduit la carte (1 cm pour 1 km). Placer le point B du sentier S_1 le plus éloigné du point A que les parachutistes peuvent atteindre en 1 heure de marche.

2) Des parcours particuliers, selon plusieurs hypothèses

   a) *Parcours 1* – On suppose qu'un parachutiste, partant de A, décide de marcher pendant une heure de façon rectiligne sans revenir sur ses pas, sans changer de direction et à vitesse maximale.
   Représenter en couleur sur la figure 1 l'ensemble R des arrivées possibles.

   b) *Parcours 2* – On suppose qu'un autre parachutiste, partant de A, emprunte le chemin S_1 pendant 30 minutes puis décide de quitter le chemin, et d'entrer dans la forêt en marchant pendant 30 minutes de façon rectiligne, sans revenir sur ses pas, sans changer de direction.
   Représenter avec une autre couleur, sur la figure 1, l'ensemble des arrivées possibles.

   c) Un troisième parachutiste marche sur le sentier S_1 durant un quart d'heure seulement avant d'entrer dans la forêt et d'y marcher 45 minutes.
   Représenter avec une troisième couleur sur la figure 1 l'ensemble des arrivées possibles.

3) Le chef du groupe des parachutistes, passionné de mathématiques, souhaite déterminer le point E du segment [AS] le plus éloigné de A pouvant être atteint en une heure, en marchant sur le sentier S_1 ou dans la forêt.

   a) Un parachutiste peut-il atteindre un point du segment [AS] distant de A de plus de 4 km ? Expliquer.

   Le chef des parachutistes considère un point K, situé dans l'ensemble R (question 2.a)), tel que ABK soit un triangle rectangle en K.

   b) Construire un tel point K sur la figure 2 (feuille annexe) ; justifier la construction.

   c) Démontrer qu'un parachutiste peut atteindre tout point du segment [BK].

   d) En déduire le point E cherché, en donner la construction.

4) Si un parachutiste, partant du point A, utilise l'un ou l'autre des sentiers S_1 ou S_2, représenter la zone de la forêt qu'il peut atteindre en une heure de marche. Construire cet ensemble sur une nouvelle figure (échelle identique : 1 cm pour 1 km) que l'on tracera sur la copie. Expliquer les étapes de la construction.

Partie B - Atteindre la source S

Deux des parachutistes partent du point A et veulent se désaltérer.

L'un affirme pouvoir atteindre la source S en moins de 2 h 12 minutes ; l'autre affirme qu'il faut au moins 2 h 12 minutes.

Lequel des deux a raison ? Justifier.