ACADÉMIE de VERSAILLES

ÉNONCÉ

On considère un carré $ABCD$ de côté a.
Soit E un point fixe de $]BC[$.

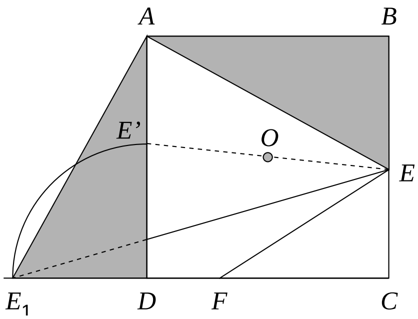
1 - Montrer qu'il existe un point F de $]CD[$ tel que le périmètre du triangle CFE soit égal à $2a$.

2 - Quel est alors la mesure de l'angle $\widehat{EAF}$?

SOLUTION 1

Elément de solution
(fourni par l'équipe académique)

« Le périmètre du triangle *CFE* se trouve être le demi-périmètre du carré. La figure ci-dessous indique comment on peut tenir compte, par une symétrie adaptée, de cette particularité. »



Développement possible - par Henri BAREIL - :

Effectivement la symétrie par rapport à O puis le rabattement de $[DE']$ en $[DE_1]$ fournissent :
- d'une part : $CE + CE_1 = 2a$ (1)
- d'autre part : la correspondance des triangles grisés dans une rotation (A, 90°) (2).

On peut, d'ailleurs, remplacer l'utilisation de cette rotation par celle de l'égalité des triangles grisés (2ème cas d'égalité, …)

On déduit de la conjugaison de (1) et de (2), que $CE + CE_1 = 2a$,
donc $FE = FE_1$
ce qui, compte tenu de $AE = AE_1$, équivaut à « (AF) est la médiatrice de $[EE_1]$ ».

La rotation (2) (ou, à défaut, l'exploitation de l'égalité des triangles grisés et de leur position) implique aussi que EAE_1 est un triangle rectangle isocèle.

(FA) est donc la bissectrice de $\widehat{BAE_1}$ et de $\widehat{EAD}$.

De là : d'une part l'appartenance de F à $]CD[$, et, d'autre part, $\widehat{EAF} = 45^c$.

D'où la construction, et l'unicité, de F, soit avec la médiatrice de $[EE_1]$, soit avec $\widehat{EAF}$.

SOLUTION 2

par Henri Bareil

(Cette solution n'est pas meilleure que la solution 1 !)

Centrons notre attention sur le triangle CFE, de périmètre $2a$.
Nous allons exploiter des considérations de géométrie élémentaire, relatives aux cercles ex-inscrits dans un triangle dans un triangle, qui permettent l'intervention du demi-périmètre de CFE.

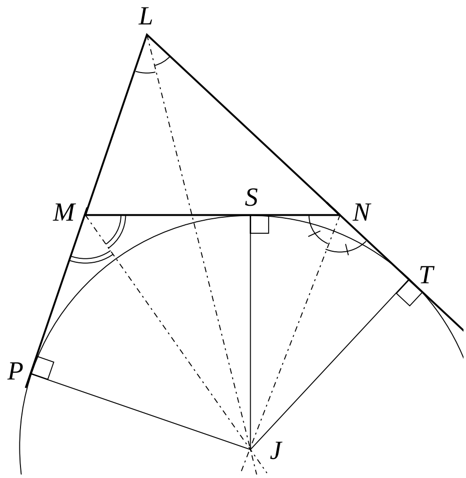
Rappelons-les :
Soit un triangle LMN (figure ci-contre) et le centre J du cercle ex-inscrit dans l'angle A.

$MS = MP$, $NS = NT$,
$LF = LT$
(propriétés des tangentes)

Donc $LP = LT$ = demi-périmètre de LMN.

D'autre part :

$$\widehat{MJN} = \frac{1}{2}\widehat{PJT}$$



Exploitons-les pour CFE *:*

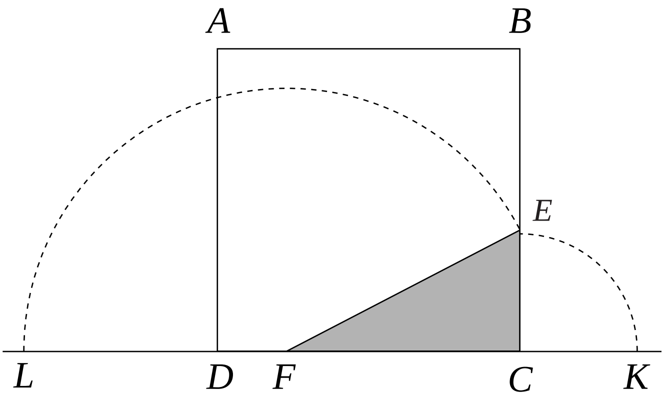
Comme $CD = CB$ = demi-périmètre de CFE, D et B sont les points de contact des demi-droites $[CF)$ et $[CE)$ avec le cercle ex-inscrit dans $\widehat{C}$.

Le centre de ce cercle est donc A. Il s'ensuit que ce cercle (A, AB) est tangent à (EF) et que $\widehat{EAF} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$.

La construction et l'unicité de F s'en déduisent : tracer, de E, la tangente - autre que (EB) - au cercle (A, AB).

On peut aussi utiliser le fait que (*EF*) et (*EB*) sont symétriques par rapport à (*AE*).

SOLUTION 3
par Henri Bareil



Utilisons le classique déploiement du périmètre du triangle CEF, ici sur (*CD*), autour de [*CF*] :
Soit *K* tel que *CK* = *CE*, *K* extérieur à [*CD*) et *L* sur [*CD*) tel que *FL* = *FE*.
Alors *LK* = 2*a*.
Or, **la connaissance de *E* induit celle de *K*.** Et *L* est donc, également, connu.
Comme *FE* = *FL*, ***F* est l'intersection de (*CD*) et de la médiatrice de [*EL*]**.

De plus, *DL* + *CK* = *a*
donc *DL* < *a*.

Or *DE* > *a*, donc *DE* > *DL*.
Il s'ensuit que la médiatrice de [*EL*] coupe bien]*DC*[.

Remarques :

1 - Le point *L* de cette « Solution 3 » n'est autre que le point E_1 de la « Solution 1 ».

2 - Le déploiement du périmètre de *CEF* sur (*EC*), autour de [*CE*], n'était pas, semble-t-il, intéressant : aucune des extrémités du périmètre déployé n'est connue.

SOLUTION 4
par Henri Bareil

Essayons une solution algébrique.

On pose, par exemple, *CE* = *m*, avec 0 < *m* < *a* et on se propose de déterminer *CF* (= *x*) tel que $m + x + \sqrt{x^2 + m^2} = 2a$

Soit $\sqrt{x^2 + m^2} = 2a - m - x$

équation équivalente, sous la condition $x < 2a - m$, à $x = \dfrac{2a(a-m)}{2a-m}$, qui remplit bien la condition de départ, et, de plus, $0 < x < a$.

D'où F, unique, sur $]CD[$.

• La recherche de l'angle $\widehat{EAF}$ apparaît plus compliquée. Elle peut se faire par la formule d'Al-Kashi, ce qui impose :

$$x^2 + m^2 = [a^2 + (a-x)^2] + [a^2 + (a-m)^2] - 2\sqrt{[a^2 + (a-x)^2] + [a^2 + (a-m)^2]}\cos\widehat{EAF}$$

soit encore, après calculs, dont l'utilisation de la valeur de x :

$$2\sqrt{\frac{2a^2\,(2a^2 - 2am + m^2)^2}{(2a-m)^2}}\cos\widehat{EAF} = 2a\,\frac{2a^2 - 2am + m^2}{2a-m}$$

d'où l'on peut déduire $\cos\widehat{EAF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ce qui donne $\widehat{EAF} = 45°$.

Ouf !

• Cette méthode de résolution est, pour ce problème-là, plutôt fastidieuse. De plus, elle ne permet une construction simple de F que quand on dispose de la mesure de $\widehat{EAF}$.

Mais elle peut dépanner les élèves à court de méthodes « géométriques » et sûrs en calcul algébrique.

SOLUTION 5

par Paul-Louis HENNEQUIN

Posons $BE = b$ et $DF = x$.

Par Pythagore $EF = \sqrt{(a-b)^2 + (a-x)^2} = 2a - FC - EC$

$= (a - FC) + (a - EC) = x + b.$

d'où $(a-b)^2 + (a-x)^2 = x^2 + 2bx + b^2$

ou $2a^2 - 2ab = 2x(a+b)$

ou $x = \dfrac{a\,(a-b)}{a+b}$

D'où $\tan\widehat{DAF} = \dfrac{x}{a} = \dfrac{a-b}{a+b}$ et $\tan\widehat{EAB} = \dfrac{b}{a}$

Alors

$$\tan(\widehat{DAF} + \widehat{EAB}) = \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}\right) \Big/ 1 - \frac{(a-b)b}{a(a+b)}$$
$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

d'où $\widehat{DAF} + \widehat{EAB} = 45°$

et $\widehat{EAF} = 45°$.

COMMENTAIRES

par l'équipe de rédaction de la brochure

1 - *On devrait accepter une preuve de l'existence de F sur*]*DC*[*par un raisonnement de type suivant :*

Soit *F* en *D* :
Alors *DE* > *a* et le périmètre du triangle *CFE* est strictement supérieur à 2*a*.

Soit *F* en *C* :
Alors le périmètre du triangle *CFE*, égal à 2*CE* est strictement inférieur à 2*a*.

Si l'on déplace *F* sur]*DC*[, de *D* vers *C* par exemple, le périmètre de *CFE* est une fonction continue décroissante de *CF*.
Il existe donc, sur]*DC*[, une position de *F* et une seule, telle que le périmètre de *ECF* soit égal à 2*a*.

2 - *Une telle discussion initiale facilite une rédaction rigoureuse des solutions.*

3 - *On peut regretter la notation*]*DC*[qui, semble-t-il, n'est plus aux programmes des Collèges, ni de Seconde et Première. Elle aura pu gêner des candidats, voire induire des contre-sens.

4 - Cela étant, il s'agit *d'un joli problème de géométrie*, accessible de diverses façons, le « Solution 3 » étant peut-être la plus classique… et la plus courte !

PALMARÈS

863 candidats, de 81 lycées étaient inscrits. 604, de 78 lycées, ont composé.
Voici leur répartition :
427 garçons et 156 jeunes filles de Première S
7 garçons et 1 jeune fille de Première S.T.I.
13 candidats « mal identifiés ».

L'équipe académique a décerné :
- deux premiers prix, deux deuxièmes prix, trois troisièmes prix et quinze accessits.

UNE INNOVATION

Avec leur **copie corrigée**, les candidats ont reçu, dûment garnie, la fiche de correction reproduite ci-après.
On ne saurait trop louer une telle initiative, qui correspondait à une prise en charge « moyenne » de 21 élèves par correcteur. Transmise par l'intermédiaire des professeurs des candidats *cette fiche permet aussi aux collègues de savoir comment leurs élèves ont été jugés*.

ACADÉMIE DE VERSAILLES

Olympiades académiques de mathématiques

Appréciations du correcteur

Numéro d'anonymat : ....

Nous vous remercions de votre participation aux Olympiades, et nous espérons que vous avez passé un bon moment à chercher ces exercices.

Bilan du travail effectué	**Exercice 1**	**Exercice 2**	**Exercice 3**	**Exercice 4**
Quelques initiatives				
Résultats partiels				
Résultats substantiels				
Travail abouti				
Appréciations particulières du correcteur				

☐ Vous avez tenté quelques démarches qui n'ont pas souvent abouti

☐ Vous avez obtenu des résultats significatifs.

☐ Votre performance est très bonne.