VERSAILLES

Exercice n^o 1

Enoncé

Couleurs et Polygone

(Séries S et STI)

On considère un polygone régulier convexe à 1 000 sommets, chacun étant coloré soit en rouge, soit en vert, soit en bleu. Une opération consiste à choisir deux sommets consécutifs n'ayant pas la même couleur et à les recolorer en attribuant à chacun la troisième couleur.

1- Prouver que, quelle que soit la coloration initiale et à l'aide d'un nombre fini d'opérations successives, il est possible de se ramener à une coloration des 1 000 sommets qui n'utilise pas plus de deux couleurs.

2- Un bloc est un ensemble de quatre sommets consécutifs. Si ces quatre sommets sont de la même couleur, on dit que le bloc est monochrome.

   a. Prouver que tout bloc peut être transformé en un bloc monochrome à l'aide d'un nombre fini d'opérations, et ce, sans modifier la couleur des sommets qui ne sont pas dans le bloc considéré.

   b. Prouver que, si deux blocs monochromes sans sommet commun sont consécutifs, on peut échanger leurs couleurs en un nombre fini d'opérations.

   c. Prouver que l'on dispose sur les blocs monochromes d'une opération analogue à celle définie sur les sommets.

   d. Prouver que, quelle que soit la coloration initiale et à l'aide d'un nombre fini d'opérations successives, il est possible de se ramener à une coloration des 1 000 sommets qui n'utilise qu'une seule couleur.

N.D.L.R. **Remarque :** Cf. exercice 2, de même nature, de Dijon.

Solution 1

1. Tout sommet vert ayant un voisin non vert peut être transformé par l'opération en un sommet rouge ou un sommet bleu. Aucun nouveau sommet vert n'est ainsi créé. On itère jusqu'à épuisement des sommets verts.

2. a. Tout bloc tricolore peut être transformé en un bloc monochrome ou en un bloc bicolore. Tout bloc bicolore peut être transformé en un bloc monochrome, comme l'indiquent les protocoles suivants :

Tricolores	**RV BV**	donne	BB RR		
	RB VV	donne	VV VV		
	RV VB	donne	BB RR		
	VR BV	donne	BB RR		
Bicolores	RR **RV**	donne	RR BB		
	RR **VR**	donne	RR BB		
	R **RV** V	donne	**RB** BV	qui donne	V **VB** V
qui donne	**VR RV**	qui donne	BB BB.		

Toutes les dispositions possibles ont été évoquées.

b. Échange des couleurs de blocs monochromes voisins

RRR **RV** VVV	donne	RR **RB BV** VV	puis	R **RV** VR **RV** V
	puis	**RB** BV RB **BV**	puis	VV **BV RB** RR
	puis	VVR **RV** VRR	puis	VV **RB BV** RR
	enfin	VV VV RR RR		

c. Recoloration de blocs voisins

RRR **RV** VVV	donne	RR **RB BV** VV	puis	R **RV** VR **RV** V
	puis	**RB** BV RB **BV**	puis	V **VB** VR **BR** R
	puis	**VR RV RV VR**	et enfin	BB BB BB BB.

d. Uniformisation

Solution 2 **(Pierre Jullien)**

Deux groupes opèrent sur les colorations (application de l'ensemble des sommets dans l'ensemble des couleurs) : celui des permutations des couleurs (d'ordre 6) et celui de l'orientation du support (parcouru dans un sens ou dans l'autre).

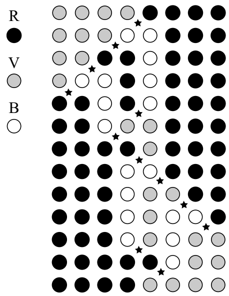
1. Si la coloration est surjective (il existe trois points de couleurs différentes), il est toujours possible, de proche en proche, d'éliminer une des trois couleurs (au choix, rouge par exemple) selon l'algorithme suivant : choisir un sens de parcours et un étiquetage (modulo 1000) ; partir d'un point p bleu ou vert.
Si $p+1$ n'est pas rouge, alors partir de $p+1$, sinon recolorer p et $p+1$ de la troisième couleur et repartir de $p+1$. En 1000 pas au maximum, la couleur rouge aura disparu.

2.a) Intéressons-nous à un bloc B sans déborder ni à droite ni à gauche. Il y a 3^4 (soit 81) manières de le colorer mais seulement dix orbites modulo les deux groupes cités. En voici une représentation :

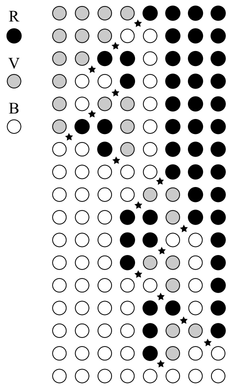
ⓋⓋⓋⓋ A : (3)	ⓋⓋⓋⓇ B : (12)	ⓋⓋⓇⓋ C : (12)	ⓋⓋⓇⓇ D : (6)	ⓋⓇⓋⓇ E : (6)
ⓋⓇⓇⓋ F : (6)	ⓋⓇⓋⒷ G : (12)	ⓋⓇⓇⒷ H : (6)	ⓋⓋⓇⒷ I : (12)	ⓋⓇⒷⓋ J : (6)

La lettre désigne le type de coloration suivi du nombre d'éléments de l'orbite. Le type A est celui à atteindre. En une opération, les I et J se ramènent à A. En une opération, E et F se ramènent à I. En une opération, C se ramène à F. De même, H et G se ramènent à C. En une opération, D se ramène à H et enfin B se ramène à D. Ainsi, en au plus six opérations, tout bloc peut devenir monochrome.

2.b) Le schéma ci-dessous explicite la permutation de deux blocs monochromes différents, en douze opérations.



2.c) Le schéma ci-dessous explicite la coloration en la troisième couleur de deux blocs monochromes différents, en seize opérations.



2.d) Dans une première étape, rendons tous les blocs consécutifs monochromes et raisonnons sur les 250 blocs obtenus. Nous disposons de deux outils E : échange de deux blocs consécutifs (voir 2.b)) et F : coloration de deux blocs de couleurs différentes en deux blocs de la troisième couleur (voir 2.c)).
Avec E, il est toujours possible d'amener deux blocs de couleurs différentes côte à côte, pour y appliquer F. Notons r, v, b les nombres de blocs respectivement rouges, verts ou bleus. Parmi ces trois nombres, deux sont égaux modulo 3 (car

la somme totale vaut 1). Supposons que ce soient v et b (avec $2 \leqslant v \leqslant b$). Si v est différent de b, appliquer F à des blocs rouges et bleus (s'il n'y avait pas de rouge, en faire préalablement apparaître en appliquant F à des blocs verts et bleus). Ainsi b diminue de un et v augmente de deux. Si nécessaire, recommencer jusqu'à ce que $v = b$. Terminer en appliquant F aux blocs verts et bleus mariés deux à deux pour rendre l'ensemble tout rouge.

Solution 3 **(François Lo Jacomo)**

1. Soit a, b, c le nombre de sommets de chacune des couleurs A, B, C. Si $a = 0$ ou $a = 1000$, le problème est trivialement résolu. Sinon, l'un au moins des sommets de couleur A est voisin d'un sommet de couleur B ou C : ces deux sommets peuvent être transformés en deux sommets de couleur C ou deux de couleur B, ce qui transforme (a, b, c) en $(a-1, b+1, c)$ ou $(a-1, b, c+1)$. Il est possible de réitérer le processus jusqu'à annuler a : hormis si le polygone est monochrome de couleur A, il est toujours possible d'éliminer la couleur A pour ne plus utiliser que les couleurs B et C.

2. a. La première solution qui vient à l'esprit est de lister tous les blocs possibles et d'étudier comment chacun d'eux peut être transformé en un bloc monochrome. Aux permutations près des couleurs A, B, C, j'ai trouvé 14 blocs possibles, mais il faut être minutieux pour ne pas en oublier, et je les ai tous transformés ainsi : AAAB → AACC → ABBC → CCBC → CAAC → BBAC → BBBB ; BCCC → AACC ... ; BABC → CCBC ... ; CBAB → CBCC → CAAC ... ; ACAC → BBAC ... ; BACB → BBBB et ACBB → BBBB.[3]
Deux remarques :
D'abord, en réponse à la N.D.L.R., pourquoi 14 ? Chacune de ces possibilités peut être combinée avec 6 permutations de couleurs (exemple : AABB peut être RRVV, RRBB, VVRR, VVBB, BBRR, BBVV), hormis le bloc monochrome AAAA qui ne donne que trois permutations : RRRR, VVVV, BBBB. Or si l'on distingue les couleurs, on a $81 = 3^4$ blocs possibles. Aux permutations près des couleurs A, B, C, il en reste : $1 + (3^4 - 3)/6 = (3^3 + 1)/2 = 14$. Plus précisément, pour deux sommets il y a $3 = (3+1)/2$ possibilités : AA et AB. Pour trois, il y a $5 = (3^2+1)/2$ triplets : AA en fournit deux (AAA et AAB), et AB trois (ABA, ABB, ABC). Et pour quatre, AAA fournit deux blocs et chacun des quatre autres triplets en fournit trois. Identifier les blocs qui ne diffèrent que par symétrie ne permet pas un inventaire aussi systématique, et augmente donc le risque d'oublier des possibilités. Qui plus est, on n'y gagne pas grand-chose puisqu'il faut expliciter cette identification dans la phrase d'introduction.

[3]N.D.L.R. On peut se demander pourquoi F. Lo Jacomo fait intervenir 14 cas alors que P. Jullien se contente de 10. Ce serait oublier que P.J. réduit à un cas deux lectures en des sens différents. Ainsi, pour P.J. CCCB et BCCC sont la même orbite. Cela supprimerait 4 cas à F.L.J.

Ensuite, la couleur du bloc monochrome résultant peut être connue avant toute transformation : si, dans un bloc, trois des sommets sont de même couleur, le bloc deviendra monochrome de la couleur du quatrième sommet ; si les trois couleurs sont présentes dans le bloc, il deviendra monochrome de la couleur présente deux fois ; si enfin deux couleurs sont présentes chacune deux fois, le bloc deviendra monochrome de la troisième couleur. Cela résulte du fait que, si à chaque couleur j'associe un nombre de $Z/3Z$, la somme des nombres est inchangée par l'opération définie,

b. Cette question me semble plus difficile que la suivante, et elle n'est guère utile. En effet, du fait de la remarque ci-dessus, si je transforme les deux blocs consécutifs : AAAABBBB en : AAACCBBB, il suffit d'appliquer une fois la question précédente pour transformer ces blocs en CCCCCCCC, car AAAC tout comme CBBB peuvent tous deux être transformés en CCCC. Mais cela ne suffit pas pour permuter les couleurs des blocs : il va falloir une nouvelle fois modifier les couleurs des deux sommets du milieu. Plus précisément, AAACCBBB $\rightarrow$ AABBCBBB $\rightarrow$ AABAABBB. Alors seulement, on peut, d'après la question précédente, transformer AABA en BBBB et ABBB en AAAA, soit permuter les blocs.

c. Ce résultat vient d'être démontré dans le cadre de la question précédente. Je ne vois pas comment répondre à la question **b.** sans voir la réponse à la question **c.**

d. Ce résultat nécessite certaines propriétés arithmétiques de 1000 : il serait faux si l'on remplaçait 1000 par un quelconque multiple de 3. En effet, la somme des couleurs (considérées comme éléments de $Z/3Z$) d'un polygone monochrome de $3k$ sommets est obligatoirement nulle. Or la somme des couleurs du polygone de départ n'est pas obligatoirement nulle.

Ma première idée était donc de faire avec des groupes de 5 sommets consécutifs la même chose qu'on vient de faire pour les blocs de 4 sommets, à savoir : prouver qu'un tel groupe peut être transformé en groupe monochrome, et que sur les groupes monochromes on dispose d'une opération analogue à celle définie sur les sommets.

Pour transformer un groupe de 5 sommets en groupe monochrome, je transforme le bloc des quatre premiers sommets du groupe en bloc monochrome : soit la couleur est la même que le dernier sommet, et c'est gagné. Soit elle est différente, auquel cas je transforme les deux derniers sommets en deux sommets de la troisième couleur : AAAAB $\rightarrow$ AAACC, et le bloc AAAC peut être transformé en CCCC, ce qui achève la démonstration.

Pour transformer deux groupes consécutifs monochromes de 5 sommets en deux groupes de la troisième couleur, on transforme : AAAAABBBBB $\rightarrow$

AAAACCBBBB → AAACCCCBBB car le bloc central ACCB peut être transformé, d'après la question **a.** en CCCC. Comme AAAC et CBBB peuvent eux aussi être transformés en CCCC, on arrive, après un nombre fini d'opérations, à CCCCCCCCCC.

Dès lors, je découpe mon polygone de 1000 sommets en 200 groupes de 5 sommets, que je peux tous rendre monochromes. Comme sur ces groupes je peux appliquer une opération analogue à celle de l'énoncé, je redécoupe le polygone en 40 hypergroupes constitués chacun de 5 groupes, et chacun de ces hypergroupes peut être rendu monochrome. Je réitère pour obtenir 8 hyper-hypergroupes monochromes. Puis j'obtiens, avec les opérations sur les blocs, deux blocs de 4 hyper-hypergroupes, soit deux « hyperblocs » de 500 sommets chacun, chacun monochrome. Une nouvelle fois, l'opération de base qui transforme deux éléments consécutifs de couleurs distinctes en deux éléments de la troisième couleur permet de transformer ces deux hyperblocs de 500 sommets, s'ils ne sont pas déjà de la même couleur, en 1000 sommets monochromes.

Mais il existe une autre piste, plus rapide et plus générale : ... prouver par récurrence que tout ensemble de $3k + 1$ sommets consécutifs peut être rendu monochrome sans toucher aux autres sommets. C'est manifestement vrai pour $k = 1$. Considérons un ensemble de $3k+1$ sommets, avec $k > 1$. Les $3k-2$ premiers peuvent, par hypothèse de récurrence, être rendus monochromes. Après cette première transformation, les quatre derniers sommets peuvent être rendus monochromes. Ce n'est pas nécessairement la même couleur : on peut avoir $3k-3$ couleurs A et 4 couleurs B. Mais comme un bloc AAAB peut être transformé en BBBB, un ensemble de $3(k-i)$ couleurs A suivi de $3i+1$ couleurs B peut être transformé en un ensemble de $3(k-i-1)$ couleurs A suivi de $3(i+1)+1$ couleurs B (il suffit de transformer les trois derniers A et le B qui suit en un bloc BBBB). Donc de proche en proche, cet ensemble de 3k+1 sommets consécutifs peut être rendu monochrome. En particulier, pour $k = 333$, le polygone de 1000 sommets peut être rendu monochrome.

Si le polygone avait $3k+2$ sommets, on pourrait rendre monochromes les $3k+1$ premiers, puis, si le dernier n'est pas de la même couleur, les deux derniers, puis, par l'itération ci-dessus, à nouveau les $3k+1$ premiers, de la couleur du $(3k+1)$-ième, donc du dernier. Seuls les polygones de $3k$ sommets ne peuvent pas nécessairement devenir monochromes.

A propos de la question 2.d.

MÉTHODE 1 (Roger Cuppens)

Par extension, on dira qu'un ensemble est monochrome si tous les blocs sont coloriés avec la même couleur.

1. Si deux ensembles de blocs A et B sont monochromes et ont même cardinal, on peut colorier A et B avec la même couleur

Démonstration. Si A et B sont de même couleur, le résultat est évident tandis que si A et B sont de couleurs différentes, d'après b et c, on peut colorier A et B avec la troisième couleur.

2. Si cinq ensembles de blocs A, B, C, D et E sont monochromes et ont même cardinal, on peut colorier ces cinq ensembles avec la même couleur.

Démonstration. On peut colorier les quatre premiers groupes d'une même couleur. Si le cinquième est de la même couleur, le résultat est démontré. Sinon, puisque VVVVR donne VVVBB puis VVR RB puis (d'après b) VRVRB puis BBBBB le résultat est démontré.

Puisqu'on a les même résultats pour des blocs de blocs, des blocs de blocs de blocs, etc., on en déduit que si n est un entier n'ayant pour diviseur que 2 et 5, alors un ensemble de n blocs monochromes peut être rendu monochrome.
Puisque pour le polygone de départ $\dfrac{1000}{4} = 250$ blocs de 4 pouvant être rendus monochromes (d'après a) et puisque $250 = 2 \times 5^3$, on en déduit le résultat demandé.

Remarque : La méthode précédente permet de montrer que l'on peut rendre monochrome tout ensemble A de n blocs si n n'est pas divisible par 3.
En effet, procédons par récurrence : le résultat est vrai pour $n = 1$, 2 ou 4. Si $n \geqslant 5$, on peut découper A en un ensemble B de $p = \dfrac{n-3}{2}$ blocs et un ensemble C de $(p+3)$ blocs. L'hypothèse de récurrence permet de rendre monochromes B et C. S'ils sont de même couleur, A est monochrome. Sinon, si B est rouge et C vert (par exemple), en changeant les couleurs des p blocs de B et de p des blocs de C, on obtient un ensemble D avec $2p$ blocs bleus et un ensemble E avec 3 blocs verts. En changeant la couleur d'un bloc de D et d'un bloc de E, on obtient $(2p-1)$ éléments bleus, 2 verts et 2 rouges, d'où l'on conclut que l'on peut colorier tout l'ensemble A en bleu.
Si n est divisible par 3, supposons qu'il y ait au départ r blocs rouges, v blocs verts et b blocs bleus.
Si $r \equiv v \equiv b \pmod 3$, alors $r = 3k + a$, $v = 3\ell + a$ et $b = 3m + a$ avec $0 \leqslant a \leqslant 2$ et (par exemple) $k \leqslant \ell \leqslant m$. En changeant les couleurs de $\ell - k$ blocs verts et bleus, on obtient $3k + a + 2(\ell - k) = 2\ell + k + a$ blocs rouges et $3\ell + a - (\ell - k) = 2\ell + k + a$ blocs verts et en changeant les couleurs de tous ces blocs, on obtient que tous les blocs sont coloriés en bleu.
Si r, v, et b ne sont pas congrus (mod 3), alors par exemple $r \equiv 1$, $v \equiv 2$ et $b \equiv 0 \pmod 3$. En changeant les couleurs de deux blocs, on obtient $r' \equiv 0$ blocs

rouges, $v' \equiv 1$ blocs verts et $b' \equiv 2$ blocs bleus. On en conclut que l'on ne peut pas obtenir des nombres de blocs tous multiples de 3, ce qui est une condition nécessaire pour la monochromie.
Donc un ensemble de blocs peut être rendu monochrome si et seulement si $r \equiv v \equiv b \pmod 3$.

MÉTHODE 2 **(Henri Bareil)**

Clés de cette méthode :
1 Obtenir *le même nombre de blocs monochromes pour deux couleurs.* En les appariant, tout basculera sur la troisième couleur.
2 On peut, à partir de deux nombres de blocs, x d'une couleur, y de l'autre (de différence d) obtenir deux valeurs x' et y' *égales si et seulement si la différence d est multiple de 3.*

Question de base :
Etant donné les 250 blocs monochromes, peut-il toujours se faire que deux couleurs aient les nombres correspondants qui diffèrent d'un multiple de 3 ?

Etude :
Soit b, r, v les nombres de blocs monochromes (de 4 sommets chacun) pour les couleurs respectives bleu, rouge, vert.
Décomposons b, r, v en y faisant apparaître les plus forts multiples de 3 possibles (d'aucuns pourront utiliser le langage des congruences) :
$b = 3n + \alpha \qquad r = 3n' + \beta \qquad v = 3n\text{''} + \gamma$ avec α, β, γ inférieurs ou égaux à 2. D'où $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 6$
cependant que $250 = 3N + 1 = 3(N - 1) + 4 = 3(N - 2) + 7$.
Alors $\alpha + \beta + \gamma = 4$ ou $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Cas $\alpha + \beta + \gamma = 4$
Ou bien deux des nombres valent 2 et le troisième 0
Ou bien deux des nombres valent 1 et le troisième 2.
Dans les deux cas, deux des trois nombres α, β, γ sont égaux.

Cas $\alpha + \beta + \gamma = 1$
Alors deux des α, β, γ sont nuls donc égaux.

Réponse à la question : OUI dans tous les cas.

D'où l'engrenage :
Exemple 1 :

	b	r	v
Nombre de blocs	90	110	50
	|	|	|
$r - v =$ mult. de 3	-60/3	-60/3	$+(60/3)\times 2$
Ici, $d = 60$	↓	↓	↓
	70	90	90

On apparie ensuite les r et les v (toujours possible grâce aux propriétés des 2 a) b) c).)
Et on a : $70 + 180$ blocs bleus.

Remarque : *L'exemple 1 est paradigmatique pourvu que l'on ait* $b \geqslant \dfrac{d}{3}$. Sinon, on peut s'y ramener. Ainsi :

Exemple 2 :

	b	r	v
	10	150	90
On "nourrit" b par une	|	|	|
soustraction arbitraire convenable	D'où +140	-70	-70
sur r et v.	↓	↓	↓
	150	80	20
	|	|	|
D'où comme à l'exemple 1	-20	-20	|
	↓	↓	↓
	130	60	60

Selon les valeurs de départ, la "nourriture" de b peut exiger d'autres étapes, mais elle est toujours possible.
Etc.

Complément

1 La démarche suivie est valable pour tout nombre de blocs égal à (multiple de $3 + 1$).

2 Lorsque ce nombre est (multiple de $3 + 2$), $\alpha + \beta + \gamma = 5$ ou $\alpha + \beta + \gamma = 2$, ce qui donne $\alpha = \beta = 2$ et $\gamma = 1$ ou $\alpha = \beta = 1$ et $\gamma = 0$
ou $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = 2$ (ce qui couvre tous les cas, les α, β, γ étant permutables).
On a donc le même comportement qu'avec les 250 blocs.

3 Lorsque le nombre de blocs monochromes est multiple de 3
ou bien $\alpha + \beta + \gamma = 0$
ou bien $\alpha + \beta + \gamma = 3$
ou bien $\alpha + \beta + \gamma = 6$.
Cela permet des égalités de deux des nombres α, β, γ, auquel cas la clé 2 peut jouer, mais cela permet aussi la solution $(0; 1; 2)$ auquel cas elle ne joue pas.
Exemples avec trois blocs, six blocs,...
Tout dépend alors du coloriage initial

MÉTHODE 3 (Henri Bareil)

L'énoncé n'exige pas une démarche « intrinsèque », qui opère sur les seuls mille sommets. Profitons-en ! ! !

On peut envisager une cascade de blocs, par quatre à chaque étape, à partir de 4^n sommets, avec la puissance de 4 immédiatement supérieure à 1000, soit 1024. De là 256 blocs monochromes qui, par analogie, conduisent à 64 grands blocs monochromes, puis à 16, à 4 et à 1. Voilà nos 1024 sommets monochromes !

Il suffit donc d'adjoindre 24 autres points aux 1000 sommets, *de les soumettre aux même règles que les 1000,*... et le tour est joué : les 1000 sommets seront dans le lot des 1024 de même couleur !

Remarques :

Cette méthode est, de prime abord, suspecte par son mépris d'un probable implicite : agir sur les mille sommets et eux seuls ! 1 Anecdotiquement elle rappellerait des méthodes d'adjonction célèbres :

- d'un chameau pour un partage de 17 chameaux, (méthode qui « bénéficie » de l'élimination d'une contradiction dans le « partage »),
- de $8x^2$ pour factoriser $x^4 + 16$ (remplacé par $x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2$),
- d'aires extérieures au triangle rectangle donné pour démontrer la relation de Pythagore,
- ...

2 *Mais, ici, cette méthode donne toujours une solution, quel que soit le nombre de sommets du polygone* (en majorant à une puissance de 4 supérieure) *alors que cela n'est pas vrai, à coup sûr, avec des méthodes « intrinsèques », quand ce nombre est multiple de 3.*
Ainsi, pour trois sommets colorés deux en bleu, un en vert, une méthode « intrinsèque » ne permet pas une monochromie des trois, alors qu'en ajoutant un sommet, le tour est joué ! Cela semble choquant !
En serions-nous à une « mathématique quantique » où la solution serait fonction de la méthode utilisée ?
Ce serait oublier que, dans nos mathématiques « concrètes », le modèle mathématique est tributaire des contraintes imposées.
Ainsi est-il impossible de trisecter un angle avec les seuls règle et compas, alors que, cette contrainte éliminée, il devient possible de le faire à l'aide de telle ou telle courbe auxiliaire (cissoïde,...)....
S'il n'y a pas de contraintes explicitées, on peut s'en créer - pour la beauté de la recherche - , on peut aussi s'en passer ! En général, en mathématiques, les habitudes décident...
Ce débat ne cesse d'ailleurs d'être posé dans les sciences de la Vie... et l'on sait

bien que des méthodes « extrinsèques » ont été les bienvenues en apportant des solutions...

③ Si, dans l'énoncé du coloriage, on ne veut pas d'adjonction de sommets, il n'y a qu'à le dire... Sinon ...
La même utilisation de puissances de 4 vaudrait, si elle n'est pas interdite, pour les licornes de l'épreuve de Dijon, quitte à introduire des licornes virtuelles, faute de vraies...

④ Curieusement l'exercice qui suit montre bien l'effet d'une contrainte à propos d'une situation classique :
L'énoncé postule, en général, $M \neq N$, auquel cas le minimum de l'aire de AMN a lieu quand il est équilatéral. Mais l'œil avisé de Paul-Louis Hennequin a repéré que l'énoncé permettait la confusion de M et N en A. Auquel cas le minimum de l'aire est zéro !... (Que voulait l'auteur de l'énoncé ?)

MÉTHODE 4 (Daniel Reisz)

Si on accepte les agissements de la méthode n°3, autant frapper un grand coup : ajoutons 1000 sommets supplémentaires, soit 2000 en tout, soit encore 500 blocs de quatre. Rendons d'abord ces blocs monochromes, puis évacuons la troisième couleur.
Reste 500 blocs monochromes de deux couleurs. L'une des deux couleurs est présente dans au moins 250 blocs. L'opération 2.b permet en la réitérant un nombre convenable de fois, de mettre les blocs d'une couleur à la queu-leu-leu. Il y a donc au moins 250 blocs adjacents d'une même couleur, soit un polygone de 1000 sommets (en recollant les deux extrémités après « évacuation » des autres.)