∽ Entrée École de santé Bron avril 2015 (corrigé) ∾

Durée : 1 heure 30 minutes Coefficient : 3

Avertissement :

- L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- II sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices nº 1 et nº 2 (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.
- L'exercice nº 3 sera traité sur une copie à part.

EXERCICE 1 : **7 points**

QCM 1 :

La limite quand n tend vers $+\infty$:

A. de $12n^2-7n-5$ vaut -5

$12n^2-7n-5 = n^2\left(12-\dfrac{7}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2} = 0$, donc par somme de limites :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 12-\frac{7}{n}-\frac{5}{n^2} = 12$ et comme :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et par produit de limites :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 12n^2-7n-5 = +\infty$.

B. de $12n^2-7n-5$ vaut 0

Cette réponse est également fausse d'après le calcul précédent.

C. de $\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$ vaut 0

$\sqrt{n+3}-\sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \dfrac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$. La limite de ce quotient est clairement 0 : réponse vraie.

D. de $\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$ vaut $\sqrt{3}$

D'après le calcul précédent la réponse est fausse.

QCM 2 :

La suite (u_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $u_n = 3\times 2^{-n}$ est :

A. croissante

On a $u_n = \dfrac{3}{2^n}$: cette suite est manifestement positive décroissante vers 0.

B. convergente vers 3

C. convergente vers 0 : réponse vraie.

D. arithmétique : non géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

QCM 3 :

Le nombre $A = \text{e}^3\left(\text{e}^{-2}\right)^5$ e peut également s'écrire :

On a $A = \text{e}^3\text{e}^{-10}\text{e} = \text{e}^{3-10+1} = \text{e}^{-6}$.

A. e^{-13}

B. e^{7}

C. e^{-6} : réponse vraie.

D. e^{-30}

QCM 4 :

L'équation : $\text{e}^{\left(x^2-2x\right)} = \dfrac{1}{\text{e}}$ admet, dans $\mathbb{R}$, pour ensemble de solutions : $\text{e}^{\left(x^2-2x\right)} = \dfrac{1}{\text{e}} \iff \text{e}^{\left(x^2-2x\right)} = \text{e}^{-1} \iff$ en prenant le logarithme népérien $x^2 - 2x = -1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0$: 1 est donc solution double de l'équation.

A. $\varnothing$

B. $\{1\}$: réponse vraie

C. $\{1~;~2\}$

D. $\{0~;~2\}$

QCM 5 :

L'inéquation : $\text{e}^{\left(1-\frac{x}{5}\right)} > 1$ admet, dans $\mathbb{R}$, pour ensemble de solutions :

$\text{e}^{\left(1-\frac{x}{5}\right)} > 1 \iff \text{e}^{\left(1-\frac{x}{5}\right)} > \text{e}^0$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien

$1 - \frac{x}{5} > 0 \iff 1 > \frac{x}{5} \iff 5 > x \iff x < 5$.

A. $]-\infty~;~5[$: réponse vraie.

B. $]0~;~5[$

C. $]-\infty~;~0[$

D. $\left]\frac{1}{5}~;~+\infty\right[$

QCM 6 :

La limite de $x^2 - x\ln x$ quand x tend vers $+\infty$ vaut :

$x^2 - x\ln x = x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x} = 1$ et par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

A. $-\infty$

B. $+\infty$: réponse vraie.

C. 0

D. n'existe pas

QCM 7 :

Le nombre de solutions de l'équation définie sur $\mathbb{R}_+{}^*$: $2(\ln x)^2 + 3\ln x - 5 = 0$ est :

En posant pour $x > 0$, $\ln x = X$, l'équation s'écrit :

$2X^2 + 3X - 5 = 0$; $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49 = 7^2$, d'où deux solutions :
$\dfrac{-3+7}{4} = X_1 = \ln x_1 = 1$, d'où $x_1 = \text{e}$;
$\dfrac{-3-7}{4} = X_2 = \ln x_2 = -\dfrac{5}{2}$, d'où $x_2 = \text{e}^{-\frac{5}{2}}$.
Ces deux solutions sont positives.

A. 0

B. 1

C. 2 : réponse vraie

D. 3

EXERCICE 2 : **7 points**

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte. On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case sur la grille prévue à cet effet.
Toute réponse juste est comptée +1 *point. Toute réponse fausse est comptée* −0,25 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QCM 8 :

La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \ln\left(4 + x^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est la fonction h' définie sur $\mathbb{R}$ par $h'(x) =$
$h'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$: la dérivée de $\ln u$ est $\dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$.

A. $\dfrac{1}{4+x^2}$

B. $\dfrac{-2x}{4+x^2}$

C. $\dfrac{x}{4+x^2}$

D. $\dfrac{2x}{4+x^2}$: réponse vraie.

QCM 9 : Une primitive de la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} + \text{e}^{3x}$ est :

La réponse B est fausse (c'est la dérivée de $f(x)$) ; la réponse C également puisque 3e^{3x} est la dérivée de e^{3x} et la réponse D aussi puisque l'exposant de l'exponentielle n'est pas 3.
Reste A : on a $F'(x) = 2 \times \dfrac{3}{3x} + 3\text{e}^{3x} = \dfrac{2}{x} + \text{e}^{3x} = f(x)$. La réponse A est correcte.

A. $F(x) = 2\ln(3x) + \dfrac{1}{3}\text{e}^{3x}$

B. $F(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 3\text{e}^{3x}$

C. $F(x) = 2\ln(3x) + 3\text{e}^{3x}$

D. $F(x) = 2\ln(x) + 3\text{e}^{2x}$

QCM 10 :

La forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{-2\text{i}}{3+3\text{i}}$ est :

Soit $z = \dfrac{-2\text{i}}{3+3\text{i}}$; on a $z = \dfrac{-2\text{i}(3-3\text{i})}{(3+3\text{i})(3-3\text{i})} = \dfrac{-6-6\text{i}}{9+9} = \dfrac{-6-6\text{i}}{18} = -\dfrac{1}{3} - \text{i}\dfrac{1}{3}$.

On a donc $|z|^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9}$, d'où $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

On peut écrire $z = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos - \frac{3\pi}{4} + \text{i}\sin - \frac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\text{e}^{-\frac{3\pi}{4}}$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{4}}$

B. $\dfrac{-\sqrt{2}}{3}\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{4}}$

C. $\dfrac{2}{3}\text{e}^{\frac{-3\text{i}\pi}{4}}$

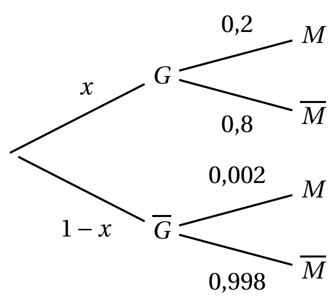
D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\text{e}^{\frac{-3\text{i}\pi}{4}}$: réponse vraie.

QCM 11 :

Une maladie survient chez 1 % des individus d'une population. Quand le sujet est porteur d'un certain génotype G, il a 20 chances sur 100 de développer la maladie. Quand il ne le porte pas, il a cent fois moins de chance de développer la maladie.

Quelle est la fréquence à 10^{-2} près du génotype G ?

Avec des notations évidentes on peut dresser l'arbre de probabilités suivant :



On a donc $p(M) = p(G \cap M) + p\left(\overline{G} \cap M\right) = 0,2x + 0,002(1-x) = 0,01$ ou

$200x + 2(1-x) = 10 \iff 198x = 8 \iff x = \dfrac{8}{198} \approx 0,0404$.

La bonne réponse au centième près est 0,04.

A. 0,01

B. 0,02

C. 0,03

D. 0,04 : réponse vraie.

QCM 12 :

P est une loi de probabilité sur [1 ; 10] de densité f définie sur [1 ; 10] par $f(x) = \lambda x^{-2}$.

Le réel λ vaut :

On doit avoir $\displaystyle\int_1^{10} \lambda x^{-2}\,\text{d}x = 1 \iff \int_1^{10} \lambda \frac{1}{x^2}\,\text{d}x = 1$ ou $\left[-\lambda\dfrac{1}{x}\right]_1^{10} = 1$

$\iff -\lambda\dfrac{1}{10} + \lambda\dfrac{1}{1} = 1 \iff \dfrac{9\lambda}{10} = 1 \iff \lambda = \dfrac{10}{9}$.

A. $\dfrac{10}{9}$: réponse vraie.

B. $\dfrac{2}{3}$

C. 1

D. $\dfrac{4}{3}$

QCM 13 :

A l'évènement « nés Avant terme »

C l'évènement « nés avec Complications »

Évènements A et C incompatibles ssi $p(A \cap C) = 0$

Évènements A et C indépendants ssi $p(A \cap C) = p(A) \times p(C)$

D'après le texte : $p(A) = 0,1$; $p(C) = 0,2$ et $p(A \cup C) = 0,26$

$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C)$ donc $p(A \cap C) = 0,04 \neq 0$; les évènements sont **compatibles**

$p(A) \times p(C) = 0,02 \neq p(A \cap C)$ donc les évènements sont **dépendants**

A. compatibles et dépendants : réponse vraie.

B. compatibles et indépendants

C. incompatibles et dépendants

D. incompatibles et indépendants

QCM 14 :

Les seules possibilités pour l'enfant sont P/p ou p/p puisque l'un des deux parents fournira un gamète p et l'autre P ou p donc deux possibilités équiprobables avec un probabilité de 0,9 d'être malades donne une probabilité de $0,5 \times 0,9 = 0,45$.

A. $0,9$

B. $0,45$: réponse vraie.

C. $0,23$

D. $0,11$

EXERCICE 3 : **6 points**

1. **a.** On a $\dfrac{C_0}{2} = C_0\mathrm{e}^{-kT} \iff \dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-kT}$, d'où en prenant le logarithme népérien : $-\ln 2 = -kT$, soit $T = \dfrac{\ln 2}{k}$.

   b. On calcule $C\left(4\dfrac{\ln 2}{k}\right) = C_0\mathrm{e}^{-k\times 4\frac{\ln 2}{k}} = C_0\mathrm{e}^{-4\ln 2} = C_0\mathrm{e}^{-\ln 2^4} = C_0\mathrm{e}^{-\ln 16} = \dfrac{C_0}{\mathrm{e}^{\ln 16}} = \dfrac{C_0}{16}$. Or $\dfrac{1}{16} < \dfrac{1}{10}$.

   Au bout de quatre demi-vies la concentration du médicament est inférieure à 10 %.

2. Dans cette question, on considère un patient donné qui absorbe par voie orale un médicament donné. Le principe actif n'est pas immédiatement présent dans le sang.

Sa concentration est modélisée par la fonction D définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$D(t) = 8\left[\exp\left(-\frac{t}{100}\right) - \exp\left(-\frac{\mathrm{e}t}{100}\right)\right]$$

a. On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}t}{100}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} D(t) = 0$.

b. $D'(t) = 8\left[-\frac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} + \frac{\mathrm{e}}{100}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}t}{100}}\right] = -\frac{8}{100}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} - \mathrm{e}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}t}{100}}\right] = -\frac{2}{25}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}t}{100}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{100}+\frac{\mathrm{e}t}{100}} - \mathrm{e}\right] = -\frac{2}{25}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}t}{100}}\left[\mathrm{e}^{\frac{t(\mathrm{e}-1)}{100}} - \mathrm{e}\right]$.

c. $D'(t) = \frac{2}{25}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}t}{100}\right)\left[\mathrm{e} - \exp\left(\frac{t(\mathrm{e}-1)}{100}\right)\right]$.

Comme $\frac{2}{25}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}t}{100}\right) > 0$ quel que soit le réel t, on a :

$D'(t) > 0 \iff \mathrm{e} - \exp\left(\frac{t(\mathrm{e}-1)}{100}\right) > 0 \iff \mathrm{e} > \exp\left(\frac{t(\mathrm{e}-1)}{100}\right) \iff 1 > \frac{t(\mathrm{e}-1)}{100} \iff 100 > t(\mathrm{e}-1) \iff t < \frac{100}{\mathrm{e}-1}$.

De même $D'(t) < 0 \iff t > \frac{100}{\mathrm{e}-1}$.

La fonction D est croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{100}{\mathrm{e}-1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{100}{\mathrm{e}-1}\ ;\ +\infty\right[$.

d. La fonction a donc un maximum sur $[0\ ;\ +\infty[$, $D\left(\frac{100}{\mathrm{e}-1}\right) = 8\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}-1}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}\right] \approx 0,079$.