Corrigé du concours d'entrée École de santé Bron 13 avril 2016 –

EXERCICE 1 — **7 points**

QCM 1

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

A. la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$

B. la suite (u_n) est majorée par 1,5

C. la suite (u_n) a pour limite $+\infty$

D. $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est majorée par 2}}$

> On démontre la propriété « pour tout n, $u_n \leqslant 2$ » par récurrence.
>
> - $u_0 = 0$ donc $u_0 \leqslant 2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
> - On suppose que, pour un $n \geqslant 0$ quelconque, on a $u_n \leqslant 2$.
> $u_n \leqslant 2$ donc $u_n + 2 \leqslant 4$ donc $\sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{4}$, ce qui signifie que $u_{n+1} \leqslant 2$. Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
> - La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
>
> Donc, pour tout n, $u_n \leqslant 2$ donc la suite (u_n) est majorée par 2.

QCM 2 : Soit la suite (u_n) pour laquelle on suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$ alors :

A. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

B. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$

C. $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0}$

D. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^3 = +\infty$

> Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$ ce qui n'est possible que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

QCM 3 : La documentaliste d'un collège a reçu une offre pour acheter les romans de la saga HP.
Elle enquête pour savoir si le sujet intéresse les élèves :
10 % des élèves ont lu le 7^{e} épisode, 38% des élèves ont vu le 7^{e} épisode au cinéma et 40 % de ceux. qui ne l'ont pas lu , ont vu le 7^{e} épisode au cinéma.
La documentaliste tire au hasard une réponse d'un des élèves interrogés.
La probabilité que l'élève soit allé voir le 7^{e} épisode au cinéma sachant qu'il l'a lu est :

A. 0,3 | $\boxed{\textbf{B. } 0{,}2}$ | **C.** 0,038 | **D.** 0,04

> Si on appelle L l'événement « l'élève a lu le livre », et V l'événement « l'élève a vu l'épisode », on peut dire que d'après le texte, $P(L) = 0{,}10$, $P(V) = 0{,}38$ et $P_{\overline{L}}(V) = 0{,}40$.
> $P_{\overline{L}}(V) = 0{,}40$ donc $\dfrac{P\left(\overline{L} \cap V\right)}{P\left(\overline{L}\right)} = 0{,}40$; $P\left(\overline{L}\right) = 1 - P(L) = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$
> On déduit que $P\left(\overline{L} \cap V\right) = 0{,}40 \times 0{,}90 = 0{,}36$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(V) = P(L \cap V) + P\left(\overline{L} \cap V\right)$
donc $P(L \cap V) = P(V) - P\left(\overline{L} \cap V\right) = 0{,}38 - 0{,}36 = 0{,}02$
$P_L(V) = \dfrac{P(L \cap V)}{P(L)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}1} = 0{,}2$

QCM 4 : Un groupe de coureurs participe à une course cycliste et ils subissent de façon aléatoire un contrôle antidopage. On appelle T l'évènement « le contrôle est positif » et on admet que $p(T) = 0{,}05$. On appelle D l'évènement « le coureur est dopé ».

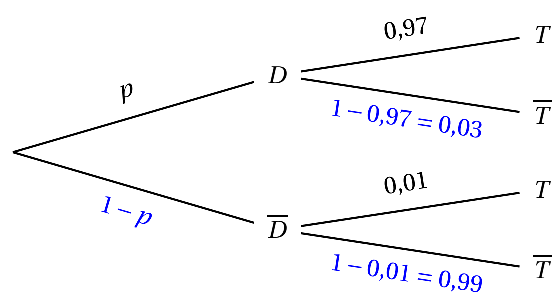
Le contrôle antidopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

La probabilité que le coureur soit dopé est :

A. $\dfrac{95}{100}$ **B.** $\dfrac{98}{100}$ **C.** $\dfrac{29}{500}$ **D.** $\boxed{\dfrac{1}{24}}$

On établit un arbre pondéré résumant la situation en appelant p la probabilité que le coureur a d'être dopé :



D'après la formule des probabilités totales,
$P(T) = P\left(M \cap T\right) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}97p + 0{,}01\,(1-p) = 0{,}96p + 0{,}01.$
On sait que $P(T) = 0{,}05$ donc $0{,}96p + 0{,}01 = 0{,}05$ donc $0{,}96p = 0{,}04$ donc $p = \dfrac{0{,}04}{0{,}96} = \dfrac{4}{96} = \dfrac{1}{24}$.

QCM 5 : L'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation : $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 14$ est :

A. $\left\{-5\,;\,4\right\}$ **B.** $\left\{-5\right\}$ **C.** $\boxed{\left\{4\right\}}$ **D.** $\varnothing$

Pour que $\ln(x+3) + \ln(x-2)$ existe, il faut que $x+3 > 0$ donc que $x > -3$, et $x-2 > 0$ donc $x > 2$. On peut donc éliminer les deux premières réponses proposées.
Si $x = 4$, $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 7 + \ln 2 = \ln 14$; la solution est donc $x = 4$.
On peut naturellement aussi résoudre dans $\left]2\,;\,+\infty\right[$ l'équation proposée :
$\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 14 \iff \ln\left((x+3)(x-2)\right) = \ln 14 \iff (x+3)(x-2) = 14$
$\iff x^2 + 3x - 2x - 6 = 14 \iff x^2 + x - 20 = 0$ qui a deux solutions -5 et 4 dont une seule dans l'intervalle $\left]2\,;\,+\infty\right[$.

QCM 6 : Pour tout réel x strictement positif, $\text{e}^{-3\ln x}$ est égal à :

A. x^3 **B.** $\boxed{\dfrac{1}{x^3}}$ **C.** $-3x$ **D.** $-x^3$

Pour $x > 0$, on a $\text{e}^{-3\ln x} = \left(\text{e}^{\ln x}\right)^{-3} = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$.

QCM 7 : L'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'inéquation : $(\text{e}^x - 3)(\text{e}^x + 1) \geqslant 0$ est :

A. $]-\infty\ ;\ -1] \cup [3\ ;\ +\infty[$

B. $]-\infty\ ;\ \ln 3]$

C. $\boxed{[\ln 3\ ;\ +\infty[}$

D. $\mathbb{R}$

Pour tout x, $\text{e}^x > 0$ donc $\text{e}^x + 1 > 0$.
$\text{e}^x - 3 \geqslant 0 \iff \text{e}^x \geqslant 3 \iff x \geqslant \ln 3$
L'ensemble solution est donc $\left[\ln 3\ ;\ +\infty\right[$.

EXERCICE 2 **7 points**

QCM 8 : Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\text{e}^{2x} - x\right) \text{d}x$

A. $I = \text{e}^2 - 2$ **B.** $I = 2\text{e}^2 - 2$ **C.** $I = \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^2 - 1\right)$ **D.** $\boxed{I = \dfrac{1}{2}\text{e}^2 - 1}$

$I = \displaystyle\int_0^1 \left(\text{e}^{2x} - x\right) \text{d}x = \left[\dfrac{\text{e}^{2x}}{2} - \dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\dfrac{\text{e}^2}{2} - \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{\text{e}^0}{2} - 0\right) = \dfrac{1}{2}\text{e}^2 - 1$

QCM 9 : Soit le nombre complexe $z = \dfrac{1+\text{i}}{1-\text{i}}$

A. l'écriture algébrique de z est $-\text{i}$

B. l'écriture algébrique de z est $\text{i}\sqrt{2}$

C. $\boxed{\text{un argument de } z \text{ est égal à } \dfrac{\pi}{2}}$

D. le module de z est $\sqrt{2}$

$\dfrac{1+\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{(1+\text{i})(1+\text{i})}{(1-\text{i})(1+\text{i})} = \dfrac{1+2\text{i}+\text{i}^2}{1-\text{i}^2} = \dfrac{1+2\text{i}-1}{1+1} = \text{i}$ qui a pour argument $\dfrac{\pi}{2}$.

QCM 10 : Soit $f(x) = 4x\text{e}^{-x}$ pour tout x réel.
La dérivée $f'(x)$ de f sur $\mathbb{R}$ est égale à :

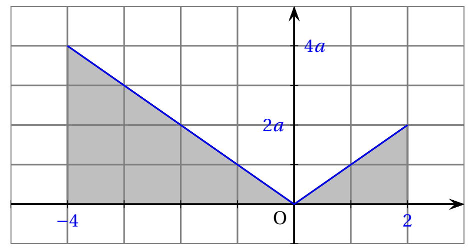
A. $3\text{e}^{-x} + 4x$ **B.** $(4x-1)\text{e}^{-x}$ **C.** -4e^{-x} **D.** $\boxed{(4-4x)\text{e}^{-x}}$

$f(x) = 4x\text{e}^{-x}$ donc $f'(x) = 4 \times \text{e}^{-x} + 4x \times (-1)\,\text{e}^{-x} = (4-4x)\,\text{e}^{-x}$

QCM 11 : Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[-4\,;\,2]$ telle que $f(x) = a|x|$, $a \in \mathbb{R}$.
Alors a est égal à :

A. $-0{,}2$ **B.** $0{,}2$ **C.** $0{,}25$ **D.** $\boxed{0{,}1}$

Une fonction densité est positive dont le réel a est positif.
On trace la représentation de la fonction f et l'aire grisée sous la courbe doit être égale à 1.
Donc $\dfrac{4 \times 4a}{2} + \dfrac{2 \times 2a}{2} = 1$ ce qui équivaut à $8a + 2a = 1$ autrement dit $a = 0{,}1$.



QCM 12 : On considère que la durée de vie, exprimée en années, d'un médicament est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ telle que $p(X \leqslant 1) = 0{,}18$, alors :

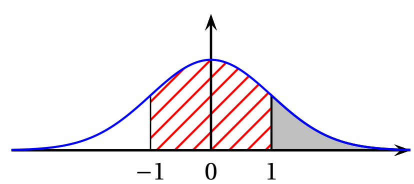
A. $\lambda = \ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ **B.** $\lambda = -\ln(18)$ **C.** $\boxed{\lambda = -\ln(0{,}82)}$ **D.** $\lambda = \dfrac{\ln(0{,}82)}{\ln(100)}$

On cherche λ tel que $\displaystyle\int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0{,}18$.
$\displaystyle\int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$
On résout : $1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}18 \iff 0{,}82 = \mathrm{e}^{-\lambda} \iff \ln(0{,}82) = -\lambda \iff \lambda = -\ln(0{,}82)$

QCM 13 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
$p(-1 < X < 1)$ est égal à :

A. $\boxed{1 - 2p(X > 1)}$ **B.** $2[p(X < 1) - 1]$ **C.** $1 - 2p(X < 1)$ **D.** $2p(X > 1) - 1$

Sur la figure ci-contre, la partie hachurée en rouge correspond à $p(-1 < X < 1)$, la partie grisée correspond à $p(X > 1)$ et la partie restée en blanc correspond à $p(X < -1)$.
Par symétrie, $p(X < -1) = p(X > 1)$ et comme l'aire totale sous la courbe est égale à 1, on a :
$p(-1 < X < 1) = 1 - p(X < -1) - p(X > 1)$
$= 1 - p(X > 1) - p(X > 1) = 1 - 2p(X > 1)$.



QCM 14 : Après avoir examiné 100 personnes, on a constaté que 20 % d'entre elles étaient malades. L'intervalle de confiance, au niveau asymptotique 95 %, de la probabilité qu'une personne examinée soit malade peut être estimée par :

A. $[0{,}10\,;\,0{,}20]$ **B.** $[0{,}15\,;\,0{,}25]$ **C.** $\boxed{[0{,}10\,;\,0{,}30]}$ **D.** $[0{,}05\,;\,0{,}35]$

L'intervalle de confiance est $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}20 - \dfrac{1}{\sqrt{100}}\,;\,0{,}20 + \dfrac{1}{\sqrt{100}}\right] = \left[0{,}10\,;\,0{,}30\right]$

EXERCICE 3 **6 points**

Après l'administration d'un médicament par voie orale chez un patient, sa concentration plasmatique dans le sang, en g/L, en fonction du temps peut être modélisée par la fonction C définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = 3\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) \text{ où } t \text{ est le temps exprimé en heures.}$$

1. $C(0) = 3\left(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{0}\right) = 0$

2. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0 \\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0 \end{array}\right\} \lim_{t\to+\infty} 3\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) = 0 \text{ donc } \lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$$

Cela signifie que la concentration plasmatique tend vers 0 quand le temps augmente.

3. $C(t) = 3\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)$ donc $C'(t) = 3\left(-1\,\mathrm{e}^{-t} - (-2)\,\mathrm{e}^{-2t}\right) = 3\left(2\,\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t}\right) = 3\,\mathrm{e}^{-t}\left(2\,\mathrm{e}^{-t} - 1\right)$

4.
- On cherche le signe de la dérivée sur $[0\ ;+\infty[$.
  Pour tout t, $\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc $C'(t)$ est du signe de $2\,\mathrm{e}^{-t} - 1$.
  $2\,\mathrm{e}^{-t} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-t} > \dfrac{1}{2} \iff -t > \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff t < -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff t < \ln(2)$
- On calcule le maximum de la fonction C sur $[0\ ;+\infty[$:
  $C(\ln(2)) = 3\left(\mathrm{e}^{-\ln(2)} - \mathrm{e}^{-2\ln(2)}\right) = 3\left(\left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right)^{-1} - \left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right)^{-2}\right) = 3\left(2^{-1} - 2^{-2}\right) = 3\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$
- On établit le tableau de variations de la fonction C sur $[0\ ;+\infty[$:

t	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0

5. La valeur maximale de la concentration a été calculée dans la question précédente et est égale à $\dfrac{3}{4}$. .

6. On veut les valeurs de t pour lesquelles $C(t) = \dfrac{2}{3}$; d'après le tableau de variations, il y aura 2 valeurs de t répondant à la question.

On résout dans l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ l'équation $C(t) = \dfrac{2}{3}$.

$$C(t) = \frac{2}{3} \iff 3\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) = \frac{2}{3} \iff 9\,\mathrm{e}^{-t} - 9\,\mathrm{e}^{-2t} = 2 \iff 0 = 9\,\mathrm{e}^{-2t} - 9\,\mathrm{e}^{-t} + 2$$
$$\iff 9\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^2 - 9\,\mathrm{e}^{-t} + 2 = 0$$

On pose $T = \mathrm{e}^{-t}$ et on résout l'équation $9T^2 - 9T + 2 = 0$.

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 9 \times 2 = 9 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$T' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-3}{18} = \dfrac{1}{3}$ et $T'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+3}{18} = \dfrac{2}{3}$

On cherche donc les valeurs de t telles que $\mathrm{e}^{-t} = \dfrac{1}{3}$ et $\mathrm{e}^{-t} = \dfrac{2}{3}$:

$\mathrm{e}^{-t} = \dfrac{1}{3} \iff -t = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \iff t = \ln(3)$; $\mathrm{e}^{-t} = \dfrac{2}{3} \iff -t = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \iff t = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \iff t = \ln(1{,}5)$

La concentration est égale à $\dfrac{2}{3}$ pour $t = \ln(1{,}5)$ et $t = \ln(3)$.

7. On complète le tableau des variations de la fonction C :

t	0		$\ln(1{,}5)$		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0

On en déduit que la concentration du médicament est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{3}$ sur l'intervalle $\left[\ln(1{,}5)\ ;\ \ln(3)\right]$.

On peut vérifier graphiquement les résultats précédents :