Entrée École de santé Bron 13 avril 2018 – Corrigé

EXERCICE 1 — **6 points**

QCM 1

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$ est :

A. croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$,

B. croissante sur $\mathbb{R}$,

C. $\boxed{\text{décroissante sur }]-\infty\,;\,0[\text{ et croissante sur } [0\,;\,+\infty[}$,

D. décroissante sur $]-\infty\,;\,-2[$ et croissante sur $[-2\,;\,+\infty[$.

> $f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$ donc $f'(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$.
> $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} > 0 \iff \mathrm{e}^{x} > \mathrm{e}^{-x} \iff x > -x \iff x > 0$
> Donc la fonction f est croissante pour $x > 0$ et décroissante pour $x < 0$.

QCM 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{0,2x^2+0,5x}$.
La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 :

A. $\boxed{\text{a pour équation } y = 2{,}5x+5}$

B. a pour équation $y = 5x$

C. a pour équation $y = 5x+10$

D. est parallèle à l'axe des abscisses.

> Une équation de la tangente à la courbe représentant une fonction f au point d'abscisse a est $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$.
> - $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{0,2x^2+0,5x}$ donc $f(0) = 5\,\mathrm{e}^{0} = 5$
> - $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{0,2x^2+0,5x}$ donc $f'(x) = 5\,(0{,}4x+0{,}5)\,\mathrm{e}^{0,2x^2+0,5x}$ et donc $f'(0) = 5\times 0{,}5\,\mathrm{e}^{0} = 2{,}5$
>
> La tangente a donc pour équation $y = 2{,}5\,(x-0)+5$ soit $y = 2{,}5x+5$.

QCM 3

Les solutions de l'inéquation $\ln(-x+5) < \ln(x+1)$ sont :

A. $]2\,;\,+\infty[$ **B.** $]-\infty\,;\,5[$ **C.** $]-1\,;\,5[$ **D.** $\boxed{]2\,;\,5[}$

> Pour pouvoir résoudre l'inéquation $\ln(-x+5) < \ln(x+1)$, il faut que $-x+5 > 0$ et $x+1 > 0$ donc que $-1 < x < 5$.
> $\ln(-x+5) < \ln(x+1) \iff -x+5 < x+1 \iff 4 < 2x \iff x > 2$
> Il faut donc $x > 2$ et $-1 < x < 5$ donc $x \in]2\,;\,5[$.

QCM 4

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ est égale à

A. $+\infty$ **B.** 1 **C.** $\boxed{0}$ **D.** 2

> $$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$
> $$= \frac{\left(x^2+1\right) - \left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$
> Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$

> $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}=+\infty$ et donc
> $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$

QCM 5

On choisit un réel au hasard entre 0 et 5 et l'on note Y la variable aléatoire égale au réel choisi. Alors :

A. $P(Y=2{,}5)=0{,}5$ **B.** $P(Y\leqslant 2)=0{,}5$ **C.** $\boxed{P_{Y\geqslant 2}(Y\leqslant 3)=\dfrac{1}{3}}$ **D.** $P_{Y\geqslant 2}(Y\leqslant 3)=\dfrac{1}{5}$

> La variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$ donc, pour $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 5$, on a $P(a\leqslant Y\leqslant b)=\dfrac{b-a}{5-0}$.
>
> On a donc $P_{Y\geqslant 2}(Y\leqslant 3)=\dfrac{P\left((Y\geqslant 2)\cap(Y\leqslant 3)\right)}{P(Y\geqslant 2)}=\dfrac{P(2\leqslant Y\leqslant 3)}{P(2\leqslant Y\leqslant 5)}=\dfrac{\frac{3-2}{5-0}}{\frac{5-2}{5-0}}=\dfrac{1}{3}$

QCM 6

Pour tout nombre réel x non nul, $2-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-2}{\mathrm{e}^{-x}-1}$ est égal à :

A. $\dfrac{3\,\mathrm{e}^{-x}-4}{\mathrm{e}^{-x}-1}$ **B.** $\boxed{\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{x}}}$ **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-4}{\mathrm{e}^{-x}-1}$ **D.** $\dfrac{3\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}-1}$

> $2-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-2}{\mathrm{e}^{-x}-1}=\dfrac{2\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)-\left(\mathrm{e}^{-x}-2\right)}{\mathrm{e}^{-x}-1}=\dfrac{2\,\mathrm{e}^{-x}-2-\mathrm{e}^{-x}+2}{\mathrm{e}^{-x}-1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}-1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{x}\right)}=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{x}}$

EXERCICE 2 — 6 points

QCM 7

Dans un laboratoire, il y a 50 tubes avec du sang contaminé et 75 tubes avec du sang non contaminé. Un préparateur tire un tube au hasard, regarde si le sang contenu est contaminé et il replace le tube. Il recommence 5 fois l'expérience. On note X le nombre de tubes avec du sang contaminé (sur les 5 tirés).

A. $P(X=5)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^5$ **B.** $E(X)=\dfrac{2}{5}$

C. $\boxed{P(X=0)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^5}$ **D.** $P(X=0)>P(X=2)$

> Il y a 50 tubes contaminés sur un total de $50+75=125$ tubes, donc lors d'un tirage, la probabilité d'avoir un tube avec du sang contaminé est $p=\dfrac{50}{125}=\dfrac{2}{5}$.
> La variable aléatoire X qui donne le nombre de tubes avec du sang contaminé sur les 5 tirés, suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\dfrac{2}{5}$.
> Pour k entier entre 0 et 5, $P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}=\dbinom{5}{k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^k\left(\dfrac{3}{5}\right)^{5-k}$
> Donc pour $k=0$, $P(X=0)=\dbinom{5}{0}\left(\dfrac{2}{5}\right)^0\left(\dfrac{3}{5}\right)^5=\left(\dfrac{3}{5}\right)^5$

QCM 8

Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{-x} - 2\right)$ est :

A. $]0\ ;\ +\infty[$ **B.** $]\ln(2)\ ;\ +\infty[$ **C.** $\boxed{]-\infty\ ;\ -\ln(2)[}$ **D.** $]0\ ;2[$

> Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{-x} - 2\right)$ est l'ensemble des x tels que $\mathrm{e}^{-x} - 2 > 0$. On résout cette inéquation.
> $\mathrm{e}^{-x} - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^{-x} > 2 \iff -x > \ln(2) \iff x < -\ln(2) \iff x \in]-\infty\ ; -\ln(2)[$

QCM 9

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Une primitive de la fonction g est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $G(x) = \left(3x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$ **B.** $G(x) = \left(-3x + x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$
C. $\boxed{G(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}}$ **D.** $G(x) = (5-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$

> Pour $G(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$, on a $G'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + (2x-1) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (2-2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = (3-2x)\,\mathrm{e}^{-x} = g(x)$.

QCM 10

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-x)\ln(x) \geqslant 0$ est :

A. $\boxed{[1\ ;3]}$ **B.** $]0\ ;3]$ **C.** $]-\infty\ ;\ 3]$ **D.** $[1\ ;\ +\infty[$

> On établit le tableau de signes de $(3-x)\ln(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$:

x	0		1		3		$+\infty$
$3-x$		+	|	+	0	−	
$\ln(x)$	||	−	0	+	|	+	
$(3-x)\ln(x)$	||	−	0	+	0	−	

> Donc $(3-x)\ln(x) \geqslant 0$ pour $x \in [1\ ;3]$.

QCM 11

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A. 1 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{\mathrm{e}}{2(1+\mathrm{e})}$ **D.** $\boxed{\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)}$

> La fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ a pour primitive sur $[0\ ;1]$ la fonction $x \longmapsto \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$ donc
> $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\mathrm{e}^1\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^0\right) = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$

QCM 12

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(30\,, \sigma^2\right)$ avec $P(X > 35) = 0{,}4$

A. $P(X < 30) = 0{,}4$ **B.** $P(30 < X < 35) = 0{,}1$

C. $P(25 < X < 35) = 0{,}3$ **D.** $P(X > 40) = 0{,}5$.

$\mu = 30$ donc $P(X > 30) = 0{,}5$; on a donc $P(30 < X < 35) = P(X > 30) - P(X > 35) = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$.

EXERCICE 3 **8 points**

On veut dépister une maladie m dont la fréquence (ou prévalence) dans la population P est notée p avec $0 < p < 1$.

On met en place un test diagnostique qui est indépendant de la valeur de p.

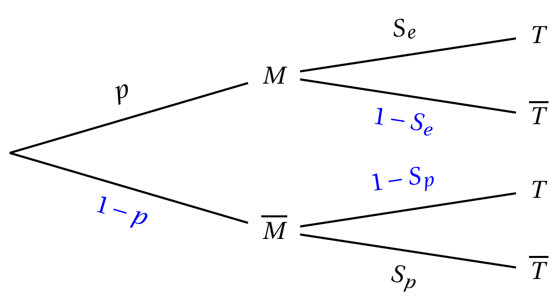
On prélève au hasard dans la population P un individu ayant été soumis au test diagnostique.

On définit les évènements suivants : T : « le test est positif » et M : « l'individu est malade ».

Pour ce test diagnostique, le fabricant a indiqué :

- la probabilité $P_M(T)$ qu'un individu ait un test positif sachant qu'il est malade, est appelée sensibilité du test et est notée S_e.
- La probabilité $P_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right)$ qu'un individu ait un test négatif sachant qu'il n'est pas malade, est appelée spécificité du test et est notée S_p.

1. On illustre la situation par un arbre pondéré.



2. a. D'après l'arbre : $P(M \cap T) = p \times S_e$ $\quad P\left(M \cap \overline{T}\right) = p \times (1 - S_e)$

$P\left(\overline{M} \cap T\right) = (1 - p)\left(1 - S_p\right)$ $\quad P\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right) = (1 - p) \times S_p$

b. La probabilité que le test délivre une juste conclusion est :

$P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right) = p \times S_e + (1 - p) \times S_p = p \times S_e + S_p - p \times S_p = p\left(S_e - S_p\right) + S_p$

3. On appelle :

- Valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité $P_T(M)$ d'être malade, sachant que le test est positif.
- Valeur prédictive négative du test (VPN), la probabilité $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$ d'être non malade, sachant que le test est négatif.

a. D'après la formule des probabilités totales,

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = pS_e + (1 - p)\left(1 - S_p\right) = pS_e + 1 - p - S_p + pS_p = p\left(S_e + S_p - 1\right) + 1 - S_p$

b. VPP $= P_T(M) = \dfrac{P(M\cap T)}{P(T)} = \dfrac{pS_e}{p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p}$

VPN $= P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{P\left(\overline{M}\cap\overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{P\left(\overline{M}\cap\overline{T}\right)}{1-P(T)} = \dfrac{(1-p)S_p}{1-\left(p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p\right)} = \dfrac{(1-p)S_p}{S_p-p\left(S_e+S_p-1\right)}$

c. Le test est considéré comme intéressant si VPP $> p$.

$$\text{VPP} > p \iff \dfrac{pS_e}{p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p} > p \iff \dfrac{pS_e}{p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p} - p > 0$$
$$\iff \dfrac{p\left(S_e-\left(p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p\right)\right)}{p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p} > 0 \iff \dfrac{p\left(S_e+S_p-1-p\left(S_e+S_p-1\right)\right)}{p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p} > 0$$
$$\iff \dfrac{p\left(S_e+S_p-1\right)(1-p)}{p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p} > 0$$

$p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p = P(T)$ donc $p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p > 0$

$p\in]0\,;1[$ donc $p>0$ et $1-p>0$ donc

$\dfrac{p\left(S_e+S_p-1\right)(1-p)}{p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p} > 0$ entraîne $S_e+S_p-1>0$ donc $S_e+S_p>1$.

4. La prévalence p du paludisme est de 90 % en Tanzanie et de 0,001 en France. Le test biologique utilisé a pour sensibilité $S_e = 0{,}9$ et pour spécificité $S_p = 0{,}8$.

a. En Tanzanie, $p = 0{,}9$, et le test est tel que $S_e = 0{,}9$ et $S_p = 0{,}8$. Donc

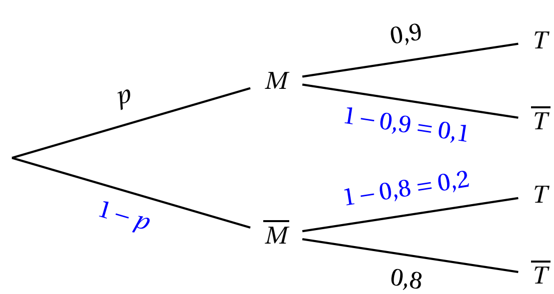
$\text{VPP}_{\text{Tanzanie}} = \dfrac{pS_e}{p\left(S_e+S_p-1\right)+1-S_p} = \dfrac{0.9\times 0.9}{0.9\,(0{,}9+0{,}8-1)+1-0{,}8} = \dfrac{0{,}81}{0{,}83} \approx 0{,}98$

On admet que $\text{VPP}_{\text{France}} = 0$; $\text{VPN}_{\text{Tanzanie}} = 0{,}47$; $\text{VPN}_{\text{France}} = 1$.

b.
- $\text{VPP}_{\text{Tanzanie}} = 0{,}98$ donc un patient de Tanzanie qui a un test positif a une probabilité de 0,98 d'être malade.
- $\text{VPN}_{\text{Tanzanie}} = 0{,}47$ donc un patient de Tanzanie qui a un test négatif a une probabilité de 0,47 de ne pas être malade, donc une probabilité de 0,53 d'être malade..
- $\text{VPP}_{\text{France}} = 0$ donc un patient de France qui a un test positif a une probabilité nulle d'être malade.
- $\text{VPN}_{\text{France}} = 1$ donc un patient de France qui a un test négatif a une probabilité de 1 de ne pas être malade.

c. On considère la fonction v définie par $v(p) = P_T(M)$.

i. On peut établir un nouvel arbre pondéré avec $S_e = 0{,}9$ et $S_p = 0{,}8$:



$$v(p) = P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M \cap T)}{P\left(M \cap T\right) + P\left(\overline{M} \cap T\right)} = \frac{0,9p}{0,9p + 0,2\left(1 - p\right)} = \frac{0,9p}{0,7p + 0,2}$$

ii. $v'(p) = \dfrac{0,9 \times \left(0,7p + 0,2\right) - 0,9p \times 0,7}{\left(0,7p + 0,2\right)^2} = \dfrac{0,18}{\left(0,7p + 0,2\right)^2} > 0$ pour tout p de $]0\,;\,1[$.

Donc la fonction v est strictement croissante sur $]0\,;\,1[$.

iii. La fonction v est croissante donc pour $p > 0,8$, $v(p) > v(0,8)$ donc $v(p) > \dfrac{0,9 \times 0,8}{0,9 \times 0,8 + 0,2}$, autrement dit VPP $> 0,95$.

Cela signifie qu'un patient dont le test est positif a une probabilité d'être malade supérieure à 0,95 ; le test est donc très pertinent.