Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Un distributeur de café est installé dans le hall d'un lycée.

Partie A

Durant la période de réglage de l'appareil, la tasse déborde une fois sur quatre. Le technicien fait dix essais indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de fois où la tasse déborde parmi ces dix essais.

I-A-1- X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Donner les valeurs de n et p.

I-A-2- Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_1 que la tasse ne déborde jamais sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_1 à 10^{-4} près.

I-A-3- Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_2 que la tasse ne déborde qu'une fois sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_2 à 10^{-4} près.

I-A-4- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_3 que la tasse déborde au moins deux fois sur les dix essais.

Partie B

Le distributeur de café est maintenant réglé. On appelle “durée de fonctionnement sans panne” du distributeur, le temps qui s'écoule avant qu'une première tasse ne déborde. La variable aléatoire T, représentant cette durée, exprimée en jours, suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Soit a un réel positif non nul. La probabilité $\mathbb{P}(T \leq a)$ que la durée de fonctionnement sans panne soit inférieure ou égale à a jours est alors donnée par :

$$\mathbb{P}(T \leq a) = \int_0^a \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt\,.$$

I-B-1- Justifier que : $\mathbb{P}(T \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$.

I-B-2- Dans cette question, on suppose que $\lambda = 0,02$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité $\mathbb{P}(T > 90)$ que le distributeur fonctionne sans panne plus de 90 jours.

I-B-3- Quelle devrait être la valeur de λ pour que la probabilité que le distributeur fonctionne sans panne plus de 120 jours soit de $0,4$? Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de λ. Justifier les calculs.

Partie C

Le distributeur de café étant réglé, le volume de café dans une tasse en centilitres peut être modélisé par une variable aléatoire V suivant une loi normale d'espérance 6 et d'écart type $0,8$.

I-C-1- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = \dfrac{V-6}{0,8}$? On précisera les paramètres de cette loi.

I-C-2- Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité P_4 que le volume de café dans une tasse soit compris entre $5,2$ et $6,8$ centilitres.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1-	$n = 10$ $\quad\quad$ $p = \frac{1}{4} = 0,25$
I-A-2-	$P_1 = \mathbb{P}(X = 0) = (1 - p)^{10}$ $\quad\quad$ $P_1 \simeq 0,0563$
I-A-3-	$P_2 = \mathbb{P}(X = 1) = 10\,p\,(1 - p)^9$ $\quad\quad$ $P_2 \simeq 0,1877$
I-A-4-	$P_3 = \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \simeq 0,7560$
I-B-1-	$\mathbb{P}(T \leq a) = \int_0^a \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = \Big[- e^{-\lambda t}\Big]_0^a = -e^{-\lambda a} + e^0 = 1 - e^{-\lambda a}$
I-B-2-	$\mathbb{P}(T > 90) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 90) = e^{-0,02 \times 90} = e^{-1,8}$ $\mathbb{P}(T > 90) \simeq 0,1653$
I-B-3-	$\lambda = -\frac{\ln 0,4}{120}$ $\quad\quad$ $\lambda \simeq 0,0076$ $\quad$ car On cherche λ tel que : $\quad \mathbb{P}(T > 120) = 0,4$. Or $\quad \mathbb{P}(T > 120) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 120) = 1 - (1 - e^{-120\lambda}) = e^{-120\lambda}$. D'où $\quad \mathbb{P}(T > 120) = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-120\lambda} = 0,4$ $\Leftrightarrow \quad -120\lambda = \ln 0,4$ $\Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln 0,4}{120}$.
I-C-1-	Loi suivie par Z et paramètres de cette loi : Z suit une loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et d'écart-type égal à 1).
I-C-2-	$P_4 = \mathbb{P}\,(5,2 \leq X \leq 6,8) = \mathbb{P}\,(-1 \leq Z \leq 1) \simeq 0,68$

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

On considère la fonction f définie par :

pour tout réel x de $[0; 1]$, $\quad f(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$.

Partie A

II-A-1- Donner les réels a et b tels que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\quad f(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.

II-A-2- Soit L l'intégrale définie par : $\quad L = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Calculer la valeur exacte de L en justifiant les calculs.

Partie B

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

pour tout $n \geq 1$, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, e^{\frac{x}{n}}\,dx$.

II-B-1- Soit $n \geq 1$ fixé. Justifier que, pour tout réel $x \in [0; 1]$, $\quad 1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$.

II-B-2-a- Justifier alors que, pour tout entier $n \geq 1$, $\quad L \leq u_n \leq L\, e^{\frac{1}{n}}$.

II-B-2-b- En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et donner sa limite. Justifier la réponse.

II-B-2-c- Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $\quad 0 \leq u_n - L \leq L\,(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

Partie C

On considère l'algorithme suivant :

Variables
- p est un entier
- n est un entier
- L est un réel

Début de l'Algorithme
- L prend la valeur $2 + 3\ln 2$
- n prend la valeur 1
- Entrer la valeur de p
- Tant que $L(e^{\frac{1}{n}} - 1) > 10^{-p}$ faire
  - n prend la valeur $n + 1$
- Fin de “Tant que”
- Afficher n

Fin de l'algorithme.

Lors de l'exécution de cet algorithme, la valeur entrée pour la variable p est 5. A la fin de l'exécution, la valeur affichée de la variable n est notée N.

II-C-1- Que représente N ?

II-C-2- Donner un réel β tel que : $\quad |u_N - 2 - 3\ln 2| \leq \beta$.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$a = 2$ $\qquad\qquad$ $b = 3$
II-A-2-	$L = 2 + 3\ \ln 2$ car $\displaystyle\int_0^1 \left(2 + \frac{3}{x+1}\right) dx = [2x + 3\ln\lvert x+1\rvert]_0^1 = 2 + 3\ln 2 - 3\ln 1$ et $\ln 1 = 0$.
II-B-1-	$1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$ car pour tout $x \in [0;1]$, on a : $0 \leq \dfrac{x}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit que : $e^0 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$ et $e^0 = 1$
II-B-2-a-	$L \leq u_n \leq Le^{\frac{1}{n}}$ car f étant à valeurs positives sur $[0;1]$, on déduit de la question **II-B-1-**, que : pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \leq f(x)\,e^{\frac{x}{n}} \leq f(x)\,e^{\frac{1}{n}}$. On a donc : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,e^{\frac{x}{n}}\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,e^{\frac{1}{n}}\,dx$ Or $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = L$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,e^{\frac{1}{n}}\,dx = e^{\frac{1}{n}}\int_0^1 f(x)\,dx = L\,e^{\frac{1}{n}}$
II-B-2-b-	$(u_n)_{n\geq 1}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}\,L = L$. En appliquant le théorème des gendarmes à l'encadrement de la question **II-B-2-a-**, on obtient le résultat demandé.
II-B-2-c-	$0 \leq u_n - L \leq L\,(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ car en retranchant L à chaque membre de l'encadrement de la question **II-B-2-a-** , on obtient : $0 = L - L \leq u_n - L \leq Le^{\frac{1}{n}} - L$
II-C-1-	N représente le plus petit entier tel que : $L\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \leq 10^{-5}$
II-C-2-	$\beta = 10^{-5}$ (ou tout réel supérieur à 10^{-5})

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé, direct.

On considère la fonction polynomiale P définie par :

pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, $$P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13\,.$$

III-1-a- Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.

III-1-b- Pour tout complexe z, on a l'égalité : $P(z) = (z^2 + 1)\,Q(z)$

où $Q(z)$ s'écrit sous la forme : $Q(z) = z^2 + cz + d$.

Donner les valeurs des réels c et d.

III-1-c- Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $Q(z) = 0$. Justifier le résultat.

III-1-d- En déduire l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z) = 0$.

III-2- Placer sur la figure les points A, C et Ω d'affixes respectives :

$$z_A = i, \qquad z_C = 3 + 2i, \qquad z_\Omega = 2\,.$$

III-3-a- On note Z_1, Z_2 et Z_3 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$.

Donner les valeurs de Z_1, Z_2 et Z_3.

III-3-b- Donner alors les modules $|Z_1|$, $|Z_2|$, $|Z_3|$ de Z_1, Z_2, Z_3.

III-3-c- Déterminer alors les valeurs exactes des distances AC, ΩA et ΩC. Justifier les réponses.

III-3-d- Déterminer une mesure, en radians, de l'angle géométrique $\widehat{A\Omega C}$. Justifier le résultat.

III-3-e- Quelle est la nature précise du triangle $A\Omega C$?

III-4- On considère les points B et D d'affixes respectives : $z_B = \overline{z_A}$ et $z_D = \overline{z_C}$

où $\overline{z_A}$ et $\overline{z_C}$ désignent respectivement les complexes conjugués de z_A et z_C.

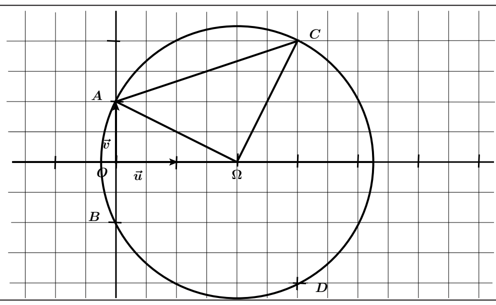
III-4-a- Placer les points B et D sur la figure de **III-2-**.

III-4-b- Justifier que les points A, B, C et D sont sur un même cercle. Préciser son centre I et son rayon r.

III-4-c- Tracer ce cercle sur la figure de **III-2-**.

III-5- Donner l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aires, du trapèze $ABDC$.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-1-a-	$P(i) = 0$ $\qquad$ $P(-i) = 0$
III-1-b-	$c = -6$ $\qquad$ $d = 13$
III-1-c-	$\mathcal{S}_1 = \{3 - 2i\,;\, 3 + 2i\}$ car $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = -16$ Les solutions sont $z_1 = \dfrac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i$ et $z_2 = \dfrac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i$
III-1-d-	$\mathcal{S}_2 = \{-i\,;\, i\,;\, 3 - 2i\,;\, 3 + 2i\}$
III-2-	
III-3-a-	$Z_1 = z_C - z_A = 3 + i$ $\qquad$ $Z_2 = z_A - z_\Omega = -2 + i$ $\qquad$ $Z_3 = z_C - z_\Omega = 1 + 2i$
III-3-b-	$\lvert Z_1\rvert = \sqrt{10}$ $\qquad$ $\lvert Z_2\rvert = \sqrt{5}$ $\qquad$ $\lvert Z_3\rvert = \sqrt{5}$
III-3-c-	$AC = \sqrt{10}$ $\qquad$ $\Omega A = \sqrt{5}$ $\qquad$ $\Omega C = \sqrt{5}$ car $AC = \lvert z_C - z_A\rvert = \lvert Z_1\rvert = \sqrt{10}$, $\Omega A = \lvert z_A - z_\Omega\rvert = \lvert Z_2\rvert = \sqrt{5}$ et $\Omega C = \lvert z_C - z_\Omega\rvert = \lvert Z_3\rvert = \sqrt{5}$
III-3-d-	$\widehat{A\Omega C} = \dfrac{\pi}{2}$ car $AC^2 = 10 = 5 + 5 = \Omega A^2 + \Omega C^2$. En appliquant la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle $A\Omega C$ est rectangle en Ω.
III-3-e-	Le triangle $A\Omega C$ est rectangle et isocèle en Ω.
III-4-a-	Utiliser la figure de **III-2-**
III-4-b-	$I = \Omega$ $\qquad$ $r = \sqrt{5}$ $\qquad$ car par symétrie par rapport à l'axe des abscisses , on a : $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega C = \Omega D$. D'autre part : $\Omega A = \Omega C = \sqrt{5}$. Finalement : $\Omega A = \Omega C = \Omega B = \Omega D$.
III-4-c-	Utiliser la figure de **III-2-**
III-5-	$\mathcal{A} = \dfrac{(\textit{petite base} + \textit{grande base}) \times \textit{hauteur}}{2} = \dfrac{(2+4)\times 3}{2} = 9$ u.a

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k})$, on considère les points E et F de coordonnées :

$$E(2,2,0) \qquad \text{et} \qquad F(0,2,4)$$

et la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\Delta \ : \begin{cases} x = t+3 \\ y = -t-1 \quad , \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 \end{cases}$$

IV-1-a- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ.

IV-1-b- Justifier que le point E n'appartient pas à Δ.

IV-1-c- Justifier que le point F appartient à Δ.

IV-1-d- En déduire la position relative des droites (EF) et Δ.

IV-2- On considère le plan $\mathcal{P}$ contenant les deux droites (EF) et Δ.

Soit le vecteur $\vec{n}\,(2,2,1)$.

IV-2-a- Donner les produits scalaires $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{EF}$ et $\vec{n}\,.\,\vec{u}$.

IV-2-b- Que peut-on en déduire pour le vecteur $\vec{n}$ par rapport au plan $\mathcal{P}$?

IV-2-c- Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$. Justifier la réponse.

IV-3- On note H le projeté orthogonal du point E sur la droite Δ.

IV-3-a- Donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{EH}\,.\,\vec{u}$.

IV-3-b- Justifier alors que les coordonnées (x_H, y_H, z_H) de H vérifient : $x_H - y_H = 0$.

IV-3-c- Donner alors les coordonnées de H.

IV-4- On note G le point de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{FG} = 2\,\vec{n}$.

IV-4-a- Donner les coordonnées de G.

IV-4-b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par G.

IV-4-c- Que dire précisément sur la position relative des deux droites Δ' et (EH) ?

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$\vec{u}\quad (1\,;\,-1\,;\,0)$
IV-1-b-	E n'appartient pas à Δ car $z_E = 0 \neq 4$
IV-1-c-	$F \in \Delta$ car pour $t = -3$ on a : $x_F = -3 + 3 = 0$, $y_F = 3 - 1 = 2$ et $z_F = 4$.
IV-1-d-	(EF) et Δ sont sécantes en F.
IV-2-a-	$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{EF} = -4 + 0 + 4 = 0$ $\qquad$ $\vec{n}\,.\,\vec{u} = 2 - 2 + 0 = 0$
IV-2-b-	$\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
IV-2-c-	Equation de $\mathcal{P}$: $2x + 2y + z - 8 = 0$ car, $\vec{n}$ étant normal à $\mathcal{P}$, le plan $\mathcal{P}$ a une équation de la forme : $2x+2y+z+\delta = 0$. Comme $E \in \mathcal{P}$, alors $2x_E + 2y_E + z_E + \delta = 0$ donc $\delta = -2x_E - 2y_E - z_E = -2 \times 2 - 2 \times 2 - 0 = -8$
IV-3-a-	$\overrightarrow{EH}\,.\,\vec{u} = 0$
IV-3-b-	$x_H - y_H = 0$ car $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} x_H - 2 \\ y_H - 2 \\ z_H - 0 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EH}\,.\,\vec{u} = (x_H - 2) - (y_H - 2) + 0 = x_H - y_H$ et d'après la question **IV-3-a-**, on a donc : $x_H - y_H = 0$.
IV-3-c-	$x_H = 1 \qquad y_H = 1 \qquad z_H = 4$
IV-4-a-	$G\quad (4\,;\,6\,;\,6)$
IV-4-b-	$\Delta' \left\{ \begin{array}{l} x = t + 4 \\ y = -t + 6 \\ z = 6 \end{array} \right. ,\qquad t \in \mathbb{R}.$
IV-4-c-	Les droites Δ' et (EH) sont non coplanaires et orthogonales.