

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Une librairie a effectué une étude auprès de ses clients concernant leur durée de passage et leur mode de paiement ainsi qu'une étude sur le prix des livres.

Partie A

La durée de passage, en minutes, d'un client peut être modélisée par une variable aléatoire T ayant pour densité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 0,02 e^{-0,02x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Soit t un réel strictement positif. La probabilité $\mathbb{P}(T \leq t)$ que la visite d'un client dans cette librairie dure moins de t minutes est alors donnée par : $\mathbb{P}(T \leq t) = \int_0^t f(x) dx$.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

- I-A-1-** Quelle est la loi suivie par T ? Préciser son paramètre.
- I-A-2-a-** Déterminer, avec le calcul d'une intégrale, la probabilité P_1 qu'un client reste moins de **15** minutes dans la librairie. Détailler le calcul.
- I-A-2-b-** Donner la probabilité P_2 qu'un client reste plus de **15** minutes dans la librairie.
- I-A-3-** Déterminer la probabilité P_3 qu'un client reste plus de **20** minutes dans la librairie sachant qu'il y est déjà depuis **15** minutes. Justifier le résultat.
- I-A-4-** Donner, en minutes, la durée moyenne de passage m_0 d'un client dans la librairie.

Partie B

On estime à **0,1** la probabilité qu'un client règle ses achats par chèque, lorsque leur montant est inférieur à **25** euros. Un matin, **20** clients font des achats d'un montant inférieur à **25** euros. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de clients, parmi ceux-là, ayant réglé leurs achats par chèque.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

- I-B-1-** Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
- I-B-2-** Donner la probabilité P_4 que trois clients exactement règlent leurs achats par chèque.
- I-B-3-** Donner la probabilité P_5 qu'au moins deux clients règlent leurs achats par chèque.

Partie C

On note Y la variable aléatoire qui, à un livre choisi au hasard dans la librairie, associe son prix, en euros. On admet que Y suit une loi normale de moyenne $m = 20$ et d'écart-type $\sigma = 5$. On prend au hasard un livre dans la librairie.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

- I-C-1-** Donner la probabilité P_6 que le prix de ce livre soit inférieur à **25** euros.
- I-C-2-** Donner la probabilité P_7 que le prix de ce livre soit supérieur à **35** euros.
- I-C-3-** Donner la probabilité P_8 que le prix de ce livre soit compris entre **10** et **15** euros.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1-	Loi suivie par T et paramètre de cette loi : T suit une loi exponentielle de paramètre 0,02 .	
I-A-2-a-	$P_1 = 1 - e^{-0,3}$ $P_1 = \mathbb{P}(T \leq 15) = \int_0^{15} 0,02 e^{-0,02x} dx = [-e^{-0,02x}]_0^{15}$ donc $P_1 = -e^{-0,02 \times 15} - (-e^0) = 1 - e^{-0,3}$.	$P_1 \simeq 0,2592$ en effet :
I-A-2-b-	$P_2 = e^{-0,3}$	$P_2 \simeq 0,7408$
I-A-3-	$P_3 = e^{-0,1}$ $P_3 = \mathbb{P}_{(T>15)}(T > 20) = \frac{\mathbb{P}((T > 15) \cap (T > 20))}{\mathbb{P}(T > 15)} = \frac{\mathbb{P}(T > 20)}{\mathbb{P}(T > 15)}$ donc $P_3 = \frac{e^{-0,02 \times 20}}{e^{-0,02 \times 15}} = e^{-0,02 \times 5} = e^{-0,1}$.	$P_3 \simeq 0,9048$ en effet :
I-A-4-	$m_0 = \frac{1}{0,02} = 50$ minutes	
I-B-1-	Loi suivie par X et paramètres de cette loi : X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.	
I-B-2-	$P_4 \simeq 0,1901$	I-B-3- $P_5 \simeq 0,6083$
I-C-1-	$P_6 \simeq 0,8413$	I-C-2- $P_7 \simeq 0,0013$
I-C-3-	$P_8 \simeq 0,1359$	

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

On considère la fonction f_n définie par :

$$\text{pour tout réel } x \in [0; +\infty[, \quad f_n(x) = n x e^{-n x}.$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

II-1-a- Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

II-1-b- On en déduit que \mathcal{C}_n admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

II-2-a- f'_n désigne la dérivée de f_n .

$$\text{Justifier que : pour tout réel } x \in [0; \infty[, \quad f'_n(x) = n e^{-n x} (1 - n x).$$

II-2-b- Dresser le tableau des variations de f_n .

II-2-c- f_n présente un maximum en un point M_n . Donner les coordonnées de M_n .

II-3-a- Justifier que :

$$\text{pour tout réel } x \in [0; +\infty[, \quad f_2(x) - f_1(x) = x e^{-2x} (2 - e^x).$$

II-3-b- On déduit de la question II-3-a- que les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont deux points communs P et Q d'abscisses respectives p et q (avec $p < q$).

Donner les valeurs exactes de p et q et une valeur approchée de q à 10^{-1} près.

II-3-c- Donner, pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

En déduire la position relative des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

II-4- Sur la figure est tracée la courbe \mathcal{C}_1 .

Placer les points M_1 , M_2 , P et Q .

Tracer la tangente à la courbe \mathcal{C}_2 au point M_2 , puis tracer la courbe \mathcal{C}_2 .

II-5- On considère la fonction F définie par :

$$\text{pour tout réel } x \in [0; +\infty[, \quad F(x) = -(x + 1) e^{-x}.$$

II-5-a- Justifier que F est une primitive de la fonction f_1 .

II-5-b- On considère l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$$

Hachurer, sur la figure de la question II-4-, le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut \mathcal{A} .

II-5-c- Déterminer \mathcal{A} . Détailler le calcul.

Le résultat sera écrit sous la forme $\mathcal{A} = \frac{1}{a} (b - c \ln 2)$ où a , b et c sont des entiers à déterminer.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-a	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$	II-1-b-	$\Delta : y = 0$												
II-2-a-	<p>Pour tout $x \geq 0$, $f'_n(x) = ne^{-nx} (1 - nx)$ en effet :</p> <p>Pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = nx$ et $v(x) = e^{-nx}$.</p> <p>Comme $(uv)' = u'v + uv'$, on a alors :</p> <p>Pour tout $x \geq 0$, $f'_n(x) = ne^{-nx} + nx(-ne^{-nx}) = ne^{-nx} (1 - nx)$.</p>														
II-2-b-	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 15%;">x</td> <td style="width: 15%;">0</td> <td style="width: 15%;">$\frac{1}{n}$</td> <td style="width: 15%;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'_n(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$f_n(x)$</td> <td>0</td> <td>$\frac{1}{e}$</td> <td>0</td> </tr> </table>	x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$	$f'_n(x)$	+	0	-	$f_n(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0	II-2-c-	$M_n \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{e} \right)$
x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$												
$f'_n(x)$	+	0	-												
$f_n(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0												
II-3-a-	<p>Pour tout $x \geq 0$, $f_2(x) - f_1(x) = xe^{-2x} (2 - e^x)$ en effet :</p> <p>$f_2(x) - f_1(x) = 2xe^{-2x} - xe^{-x} = 2xe^{-2x} - xe^{-2x}e^x = xe^{-2x} (2 - e^x)$.</p>														
II-3-b-	$p = 0$	$q = \ln 2$	$q \simeq 0,7$												
II-3-c-	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 15%;">x</td> <td style="width: 15%;">0</td> <td style="width: 15%;">ln 2</td> <td style="width: 15%;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>Signe de $f_2(x) - f_1(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>Position relative de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2</td> <td>\mathcal{C}_2 est au dessus de \mathcal{C}_1</td> <td>\mathcal{C}_2 est en dessous de \mathcal{C}_1</td> <td></td> </tr> </table>	x	0	ln 2	$+\infty$	Signe de $f_2(x) - f_1(x)$	+	0	-	Position relative de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2	\mathcal{C}_2 est au dessus de \mathcal{C}_1	\mathcal{C}_2 est en dessous de \mathcal{C}_1			
x	0	ln 2	$+\infty$												
Signe de $f_2(x) - f_1(x)$	+	0	-												
Position relative de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2	\mathcal{C}_2 est au dessus de \mathcal{C}_1	\mathcal{C}_2 est en dessous de \mathcal{C}_1													
II-4-															
II-5-a-	<p>F est une primitive de f_1 en effet :</p> <p>$F'(x) = -(1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x})) = xe^{-x} = f_1(x)$.</p>														
II-5-b-	Utiliser la figure de la question II-4-														
II-5-c-	<p>$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$, en effet : $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} f_1(x) dx = [F(x)]_0^{\ln 2} = F(\ln 2) - F(0)$.</p> <p>Or $F(0) = -e^{-0} = -1$,</p> <p>et $F(\ln 2) = -(1 + \ln 2)e^{-\ln 2} = -(1 + \ln 2) \frac{1}{e^{\ln 2}} = -\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$.</p> <p>Donc $\mathcal{A} = -\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$.</p>														

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Partie A

- III-A-1- Tracer le triangle ABC sur la figure.
- III-A-2- Donner l'affixe z_C du point C .
- III-A-3-a- Calculer le module $|z_B - z_A|$. Détailler le calcul.
- III-A-3-b- Donner les modules $|z_C - z_A|$ et $|z_C - z_B|$.
- III-A-3-c- En déduire la nature du triangle ABC .

Partie B

On considère les points suivants :

- I : projeté orthogonal du point O sur la droite (BC) ,
- J : projeté orthogonal du point O sur la droite (AC) ,
- K : projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) .

On désigne par z_I, z_J et z_K leurs affixes respectives.

- III-B-1- Placer les points I, J et K sur la figure de la question III-A-1-.
- III-B-2-a- Justifier que J est le milieu du segment $[AC]$.
- III-B-2-b- Calculer alors l'affixe z_J de J . Donner son module $|z_J|$.
- III-B-2-c- Donner les affixes z_I et z_K ainsi que leur module $|z_I|$ et $|z_K|$.
- III-B-3- En déduire la valeur de la somme des distances : $L_O = OI + OJ + OK$. Justifier la réponse.

Partie C

Soit M un point quelconque situé à l'intérieur du triangle ABC .

On considère les points suivants :

- E : projeté orthogonal de M sur la droite (BC) ,
- F : projeté orthogonal de M sur la droite (AC) ,
- G : projeté orthogonal de M sur la droite (AB) .

On note $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ et \mathcal{A} les aires respectives des triangles MBC, MAC, MAB et ABC .

On pose $L_M = ME + MF + MG$.

- III-C-1- Avec le point M déjà placé sur la figure de la question III-A-1-, placer les points E, F et G .
- III-C-2-a- Exprimer \mathcal{A}_1 en fonction de la distance ME .
- III-C-2-b- Ecrire une relation liant $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ et \mathcal{A} .
- III-C-2-c- Déduire des questions précédentes que : $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} L_M$.
- III-C-3- L'égalité précédente montre que la valeur de L_M ne dépend pas de la position du point M à l'intérieur du triangle ABC .
Donner la valeur de L_M . Justifier la réponse.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REponses A L'EXERCICE III

<p>III-A-1-</p>		<p>III-A-2- $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$</p>
		<p>III-A-3-a- $z_B - z_A = \sqrt{3}$ En effet : $z_B - z_A = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $z_B - z_A = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$</p>
<p>III-A-3-b-</p>	<p>$z_C - z_A = \sqrt{3}$</p>	<p>$z_C - z_B = \sqrt{3}$</p>
<p>III-A-3-c-</p>	<p>Nature du triangle ABC : ABC est un triangle équilatéral.</p>	
<p>III-B-1-</p>	<p>Utiliser la figure de III-A-1-.</p>	
<p>III-B-2-a-</p>	<p>J est le milieu de $[AC]$ en effet : $OA = 1$ et $OC = z_C = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$ Comme $OA = OC$, le triangle OAC est isocèle en O. Or (OJ) est la hauteur issue du sommet principal O. C'est donc aussi la médiane du segment $[AC]$. Donc J est le milieu de $[AC]$.</p>	
<p>III-B-2-b-</p>	<p>$z_J = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$</p>	<p>$z_J = \frac{1}{2}$</p>
<p>III-B-2-c-</p>	<p>$z_I = -\frac{1}{2}$</p>	<p>$z_K = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ $z_I = \frac{1}{2}$ $z_K = \frac{1}{2}$</p>
<p>III-B-3-</p>	<p>$L_O = \frac{3}{2}$ en effet : $L_O = z_I + z_J + z_K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$</p>	
<p>III-C-1-</p>	<p>Utiliser la figure de III-A-1-.</p>	
<p>III-C-2-a-</p>	<p>$\mathcal{A}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}ME$</p>	
<p>III-C-2-b-</p>	<p>Relation liant $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ et \mathcal{A} : $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}$</p>	
<p>III-C-2-c-</p>	<p>$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}L_M$ en effet : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}ME + \frac{\sqrt{3}}{2}MF + \frac{\sqrt{3}}{2}MG = \frac{\sqrt{3}}{2}L_M$</p>	
<p>III-C-3-</p>	<p>$L_M = \frac{3}{2}$ en effet : $L_M = L_O$</p>	

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(3; 2; 2)$,
- le point C de coordonnées $(-1; -1; 0)$,
- le point D de coordonnées $(1; -3; 2)$,
- le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne : $x + 2y + z + 3 = 0$,
- la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\Delta : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -6 + 5t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

- IV-1- \mathcal{P} et Δ sont sécants en un point E .
Déterminer les coordonnées $(x_E; y_E; z_E)$ de E .
- IV-2-a- Vérifiez que la droite (CD) est incluse dans le plan \mathcal{P} .
- IV-2-b- On note B le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
Déterminer les coordonnées $(x_B; y_B; z_B)$ du point B . Détailler le calcul.
- IV-2-c- Justifier que le point B appartient à la droite Δ .
- IV-3-a- Donner les coordonnées du vecteur directeur \vec{u} de la droite (CD) d'abscisse 1.
- IV-3-b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (CD) .
- IV-3-c- On désigne par H le point de la droite (CD) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (CD) .
Déterminer les coordonnées $(x_H; y_H; z_H)$ de H . Détailler le calcul.
- IV-4- Déterminer la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire \mathcal{A} du parallélogramme $ABCD$. Détailler le calcul.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-	$x_E = -1$ $E \in \Delta \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -3 + 2t \\ y_E = -6 + 5t \\ z_E = 0 \end{cases}$	$y_E = -1$ et $x_E + 2y_E + z_E + 3 = 0$.	$z_E = 0$	en effet : Alors t est solution de $(-3 + 2t) + 2(-6 + 5t) - 0 + 3 = 0$ ou encore $12t - 12 = 0$. Et donc $t = 1$. D'où $x_E = -3 + 2 \times 1 = -1$, $y_E = -6 + 5 \times 1 = -1$ et $z_E = 0$.
IV-2-a-	la droite (CD) est incluse dans le plan \mathcal{P} en effet : $C \in \mathcal{P}$ car $C = E$ et $E \in \mathcal{P}$ par définition de E . $D \in \mathcal{P}$ car $x_D + 2y_D + z_D + 3 = 1 + 2 \times (-3) + 2 + 3 = 0$,			
IV-2-b-	$x_B = 1$ $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 3 = -2 \\ y_B - 2 = 2 \\ z_B - 2 = -2 \end{cases}$	$y_B = 4$	$z_B = 0$	en effet : $\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 4 \\ z_B = 0 \end{cases}$
IV-2-c-	B appartient à la droite Δ en effet : $\begin{cases} x_B = -3 + 2t \\ y_B = -6 + 5t \\ z_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3 + 2t \\ 4 = -6 + 5t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$.			
IV-3-a-	$\vec{u} \quad (1; -1; 1)$			
IV-3-b-	$(CD) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.			
IV-3-c-	$x_H = 0$ $H \in (CD)$ donc $x_H = -1 + t$, $y_H = -1 - t$ et $z_H = t$ $(AH) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ $\Leftrightarrow 1 \times (x_H - x_A) - 1 \times (y_H - y_A) + 1 \times (z_H - z_A) = 0$ $\Leftrightarrow (t - 4) - (-t - 3) + (t - 2) = 0$ $\Leftrightarrow 3t - 3 = 0$ $\Leftrightarrow t = 1$	$y_H = -2$	$z_H = 1$	en effet : D'où $x_H = -1 + 1 = 0$, $y_H = -1 - 1 = -2$, $z_H = 1$
IV-4-	$\mathcal{A} = \sqrt{312} = 2\sqrt{78}$ en effet : $(AH) \perp (CD)$ et $H \in (CD)$ donc $\mathcal{A} = CD \times AH$ avec : $CD = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ car $\overrightarrow{CD} (2, -2, 2)$, et $AH = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$ car $\overrightarrow{AH} (-3, -4, -1)$.			