



Epreuves du vendredi 30 avril 2021

Ce livret comporte les énoncés des sujets et 5 feuilles « document réponses ».

Vous devez traiter :

- le sujet de Mathématiques (obligatoire)
- le sujet de spécialité que vous avez choisi préalablement sur Parcoursup indiqué sur votre convocation (Physique-Chimie ou Sciences de la Vie et de la Terre/Biologie-écologie ou Numérique et Sciences Informatiques ou Sciences de l'Ingénieur).
Attention : Si vous composez sur un autre sujet de spécialité : votre copie ne sera pas corrigée.

Vous devez :

- Lire et appliquer les consignes listées sur les documents réponses
- Ecrire vos réponses dans les cadres prédéfinis.

Nous vous conseillons de répartir les 3h d'épreuves entre le sujet de Mathématiques (2h) et le sujet de spécialité (1h).

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.

Aucun document n'est autorisé.

L'usage d'un téléphone ou de tout objet communicant est interdit.

Table des matières :

Mathématiques : 3 exercices	pages 2 à 5
Physique-Chimie : 3 exercices	pages 6 à 8
Sciences de la Vie et de la Terre/Biologie-Ecologie : 3 exercices	pages 9 à 12
Numérique et Sciences Informatiques : 3 exercices	pages 13 à 15
Sciences de l'Ingénieur : 1 exercice	pages 16 à 19

Partie C – Dans une sphère

On appelle plan médiateur d'un segment non réduit à un point, l'ensemble des points de l'espace équidistants des extrémités de ce segment. C'est le plan perpendiculaire au segment en son milieu.

- I-15- Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AC]$.
 - I-16- Donner les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AC} .
 - I-17- En déduire qu'une équation du plan médiateur P_1 du segment $[AC]$ est $x = 1$. Justifier la réponse.
 - I-18- Justifier qu'une équation du plan médiateur P_2 du segment $[AB]$ est $x - 4y + 11 = 0$.
- On admet qu'une équation du plan médiateur P_3 du segment $[CD]$ est $z = 10$.
- I-19- En utilisant les équations des plans médiateurs, déterminer les coordonnées du centre Ω de la sphère (\mathcal{S}) circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Détailler le calcul.
 - I-20- Calculer le rayon R de la sphère (\mathcal{S}) . Détailler le calcul.

Mathématiques - EXERCICE II (22 points)

Tous les résultats de cet exercice seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Les **Parties A et B** sont indépendantes.

Soit A et B deux pièces de monnaie. La pièce A donne « Face » avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la pièce B donne « Face » avec la probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsqu'on lance l'une de ces deux pièces, si on obtient « Face », on conserve cette pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Partie A – Trois lancers successifs des pièces

On effectue une série de trois lancers, en commençant par lancer la pièce A. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 3, on note F_i l'événement « on obtient Face au $i^{\text{ème}}$ lancer » et $P_i = \overline{F_i}$ l'événement contraire.

- II-1- Compléter l'arbre de probabilités donné.
- II-2- X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de fois où « Face » est obtenu. Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X .
- II-3- Calculer l'espérance de X .

Partie B – Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} \end{cases}$$

- II-4- Donner les valeurs de u_1 et u_2 .
- II-5- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
pour tout $n \geq 0, v_n = u_n - \frac{3}{5}$.
- II-5-a- Donner la valeur de v_0 .
- II-5-b- Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.
- II-6- Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 0, u_n = -\frac{8}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$.
- II-7- Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\frac{3}{5}$.

Partie C – n lancers successifs des pièces

Dans cette partie, on ne se limite plus à trois lancers.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

A_n : « on utilise la pièce A pour le $n^{\text{ème}}$ lancer »

\overline{A}_n : « on utilise la pièce B pour le $n^{\text{ème}}$ lancer ».

On note $p_n = P(A_n)$. On commence toujours par lancer la pièce A et on a donc $p_1 = 1$.

II-8- Donner $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A}_n}(A_{n+1})$.

II-9- Donner l'expression de $P(\overline{A}_n)$, $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$ en fonction de p_n .

II-10- En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$.

D'après ce qui précède et la question **II-6-**, on a $p_n = -\frac{8}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

II-11- On note F_n l'événement « obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

II-11-a- Donner l'expression de $P(F_n \cap A_n)$ et $P(F_n \cap \overline{A}_n)$ en fonction de p_n .

II-11-b- Déterminer la limite de la probabilité $P(F_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Justifier la réponse.

Mathématiques - EXERCICE III (27 points)

Les **Parties A** et **B** sont indépendantes. La **Partie C** dépend des deux premières parties.

On souhaite étudier l'évolution au cours du temps de la concentration d'un analgésique dans le sang : par voie intraveineuse dans la **Partie A**, puis par voie orale dans la **Partie B**.

Partie A – Voie intraveineuse

Dans cette partie, λ est une constante réelle strictement positive.

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y'(t) = -\lambda y(t)$, où y est une fonction définie pour tout réel t .

III-1- Déterminer la solution générale de (E_1) .

III-2- On appelle Q la solution de (E_1) qui vérifie $Q(0) = 0,6$. Donner l'expression de Q en fonction de λ . Justifier la réponse.

III-3- Donner la limite de Q en $+\infty$. Donner le sens de variation de Q . Aucune justification n'est demandée. A l'instant $t = 0$, une dose d'un analgésique est injectée dans le sang par voie intraveineuse. La substance se répartit instantanément dans le sang, ce qui donne une concentration initiale de 0,6 mg/L, et est ensuite progressivement éliminée.

Pour tout $t \geq 0$, la concentration de médicament, en mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est égale à $Q(t)$ trouvée à la question **III-2-**.

Au bout d'une heure, la concentration de médicament présente dans le sang a diminué de 30%.

III-4- Calculer la valeur de λ . On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près. Justifier la réponse.

Le médicament est efficace tant que sa concentration dans le sang est supérieure à 0,1 mg/L.

III-5- Déterminer, en heures, le temps d'efficacité t_e du médicament. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près. Justifier la réponse.

Partie B – Voie orale

On considère l'équation différentielle $(E_2) : y'(t) + y(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$.

- III-6- Vérifier que la fonction g définie, pour tout réel t , par $g(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ est une solution de (E_2) .
- III-7- En déduire la solution générale de (E_2) .
- III-8- Donner la solution f de (E_2) vérifiant $f(0) = 0$. Justifier la réponse.

On considère la fonction q définie sur $[0 ; +\infty[$ par $q(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$. On note C_q la courbe représentative de q dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- III-9- Donner la limite de q en $+\infty$. En déduire une équation de l'asymptote Δ à C_q en $+\infty$.
- III-10- q' désigne la fonction dérivée de q . Pour tout réel positif t , $q'(t)$ s'écrit sous la forme
$$q'(t) = e^{-\frac{t}{2}}(a e^{-\frac{t}{2}} + b).$$
Donner la valeur de a et de b . Justifier la réponse.
- III-11- Donner l'ensemble des solutions réelles t de l'inéquation $q'(t) > 0$. Justifier la réponse.
- III-12- Soit A le point de C_q d'abscisse $x_A = \ln 4$ et d'ordonnée y_A . Calculer la valeur exacte de y_A . Détailler le calcul.
- III-13- Compléter le tableau de variations de q sur $[0 ; +\infty[$.

A l'instant $t = 0$, un analgésique est administré par voie orale en une prise. La substance est absorbée progressivement dans le sang puis éliminée.

Pour tout $t \geq 0$, la concentration de médicament, en mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est égale à $q(t)$.

Le médicament cause des effets indésirables quand sa concentration dans le sang est supérieure à 0,3 mg/L.

- III-14- Le médicament va-t-il causer des effets indésirables au patient ? Justifier la réponse.

Partie C – Comparaison des deux méthodes

- III-15- QCM - Quel mode d'administration choisirons-nous si nous voulons être tout de suite soulagé de la douleur ?
A) Voie orale B) Voie intraveineuse C) Peu importe lequel
- III-16- QCM - Sachant que l'analgésique est efficace quand sa concentration dans le sang est supérieure à 0,1 mg/L par les deux méthodes, quel mode d'administration choisirons-nous si nous voulons que ce médicament soit efficace le plus longtemps possible ?
A) Voie orale B) Voie intraveineuse C) Peu importe lequel