ANNALES 2022

CORRIGÉS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PUISSANCE ALPHA
concours post-bac

CORRIGÉS DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°1 : Bases du calcul

Item a. **Réponse F**

$$(2x-1)^2\times(4x+1)=\left(4x^2-4x+1\right)\times(4x+1)=16x^3+4x^2-16x^2-4x+4x+1$$
$$=16x^3-12x^2+1.$$

Item b. **Réponse V**

$$2+\frac{4}{1-\frac{3}{2-\frac{5}{3}}}=2+\frac{4}{1-\frac{3}{\frac{6}{3}-\frac{5}{3}}}=2+\frac{4}{1-\frac{3}{\frac{1}{3}}}=2+\frac{4}{1-9}=2-\frac{4}{8}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Item c. **Réponse V**

$$\frac{0,14^2\times 0,07^{-2}\times 10^{-4}}{0,2^3\times 10^5}=\frac{\left(2\times 7\times 10^{-2}\right)^2\times\left(7\times 10^{-2}\right)^{-2}\times 10^{-4}}{\left(2\times 10^{-1}\right)^3\times 10^5}=\frac{2^2\times 7^2\times 10^{-4}\times 7^{-2}\times 10^4\times 10^{-4}}{2^3\times 10^{-3}\times 10^5}=\frac{10^{-4}}{2\times 10^2}=0,5\times 10^{-6}$$
$$=5\times 10^{-7}.$$

Item d. **Réponse V**

$$\frac{5}{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}=\frac{5}{7+1-2\sqrt{7}}=\frac{5}{8-2\sqrt{7}}=\frac{5\left(8+2\sqrt{7}\right)}{\left(8-2\sqrt{7}\right)\times\left(8+2\sqrt{7}\right)}=\frac{40+10\sqrt{7}}{64-28}=\frac{40}{36}+\frac{10}{36}\sqrt{7}=\frac{10}{9}+\frac{5}{18}\sqrt{7}.$$

Exercice n°2 : Bases de géométrie

Item a. **Réponse V**

- $V_1=\frac{1}{3}\times Aire(ABCD)\times AM=\frac{x}{3}\times 3\times 8=8x$
- $V_2=\frac{1}{3}\times Aire(EHF)\times EM=\frac{10-x}{3}\times\frac{3\times 8}{2}=4(10-x)=40-4x$

$$V_1=V_2\Leftrightarrow 8x=40-4x\Leftrightarrow 12x=40\Leftrightarrow x=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}=\frac{1}{3}\times 10\Leftrightarrow AM=\frac{1}{3}\times AE.$$

Item b. **Réponse F**

- On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle TRK rectangle en R:

$$TK^2=TR^2+RK^2\Leftrightarrow TR^2=25-y^2\Leftrightarrow TR=\sqrt{25-y^2}$$

- $S_1=Aire(ITJ)=\frac{IJ\times TR}{2}=5\times TR=5\times\sqrt{25-y^2}$
- On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KSL rectangle en L:

$$KS^2=SL^2+KL^2\Leftrightarrow SL^2=25-\left(5-y\right)^2=10y-y^2\Leftrightarrow SL=\sqrt{10y-y^2}$$

- $S_2 = Aire(ISJ) = \dfrac{IJ \times SL}{2} = 5\sqrt{10y - y^2}$
- $Si\ \ y = 1$ alors $S_1 \neq S_2$

Item c. **Réponse V**

Si $y = \dfrac{5}{2}$ alors L et R sont les milieux respectifs des segments [KJ] et [IK].
Dans ce cas, T et S sont symétriques par rapport à la droite Δ et les droites Δ et (TS) sont perpendiculaires.

Le quadrilatère ITSJ est un trapèze d'aire $S_3 = \dfrac{(TS + IJ) \times TR}{2} = \dfrac{(5+10) \times \sqrt{25 - \dfrac{25}{4}}}{2} = \dfrac{75\sqrt{3}}{4}$.

Item d. **Réponse F**

Si $y = \dfrac{5}{2}$ alors les droites (TJ) et (SI) sont symétriques par rapport à Δ.
Si on pose Ω le point d'intersection des droites (TJ) et Δ alors Ω est son propre symétrique dans la réflexion d'axe Δ donc $\Omega \in (SI)$.
Les droites (SI), (TJ) et Δ sont donc concourantes en Ω.

Exercice n°3 : Polynômes et fonction rationnelle

Item a. **Réponse F**

$\Delta = -7 < 0$ donc l'équation $4x^2 - 3x + 1 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Item b. **Réponse F**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{4x - 1}{3x^2 - 1}$.

- $f(x)$ existe si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \ ; \ \dfrac{\sqrt{3}}{3} \right\}$
- Pour résoudre $f(x) \geqslant 0$, on rédige un tableau de signe $\cdots$
- $f(x) \geqslant 0 \iff x \in \left] -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \ ; \ \dfrac{1}{4} \right] \cup \left] \dfrac{\sqrt{3}}{3} \ ; \ +\infty \right[$

Item c. **Réponse V**

- La courbe représentative de la fonction $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet le point $S\left(-\dfrac{b}{2a} \ ; \ -\dfrac{\Delta}{4a} \right)$ comme sommet.
- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{-6} = -\dfrac{2}{3}$
- $\Delta = b^2 - 4ac = 28$ donc $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{28}{-12} = \dfrac{7}{3}$

Item d. **Réponse V**

- Soit $Q : x \mapsto 2mx^2 + (m-1)x - 5$ avec $m \in \mathbb{R}^*$
- $\Delta = b^2 - 4ac = (m-1)^2 - 4 \times (2m) \times (-5) = m^2 + 38m + 1$
- $Q(x) = 0$ admet deux solutions réelles si et seulement si $\Delta = m^2 + 38m + 1 > 0$
- $m^2 + 38m + 1 > 0 \iff \cdots \iff m \in \left] -\infty \ ; -6\sqrt{10} - 19 \right[\cup \left] 6\sqrt{10} - 19 \ ; 0 \right[\cup \left] 0 \ ; +\infty \right[$

Exercice n°4 : Dérivation

Item a. **Réponse F**

La dérivée de la fonction $f: x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-3}$ est égale à $f': x \mapsto -\dfrac{5}{(x-3)^2}$

Item b. **Réponse F**

- La dérivée de la fonction $g: x \mapsto 4x^2-3x+1$ est la fonction $g': x \mapsto 8x-3$.
- L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $x=-1$ a pour équation :

$$y = g'(-1)\times(x+1)+g(-1) = \cdots = -11x-3$$

Item c. **Réponse F**

- La dérivée de la fonction $h: x \mapsto -\dfrac{3}{x-2}$ est la fonction $h': x \mapsto \dfrac{3}{(x-2)^2}$
- Le coéfficient directeur de la tangente (T_a) à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x=a$ est égale à $f'(a)$
- Les droites (T_a) et Δ' sont parallèles si et seulement si

$$f'(a)=-5 \iff \frac{3}{(a-2)^2}=-5 \iff \frac{5a^2-20a+23}{(a-2)^2}=0 \iff \begin{cases} 5a^2-20a+23=0 \\ a\neq 2 \end{cases}$$

- $5x^2-20x+23=0 \quad \Delta=-60$ l'équation n'admet aucune solution

Item d. **Réponse F**

La fonction k existe si et seulement si $x \neq -\dfrac{3}{2}$. On peut démontrer que la fonction k est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Exercice n°5 : Probabilités

Item a. **Réponse V**

La probabilité d'avoir deux boules de la même couleur est égale à :

$$p\left(B_1 \bigcap B_2\right)+p\left(N_1 \bigcap N_2\right) = \frac{n\times(n-1)+20}{(n+4)\times(n+5)} = \frac{n^2-n+20}{(n+4)(n+5)}$$

Item b. **Réponse V**

- $p\left(B_1 \bigcap N_2\right) = \dfrac{n}{n+5}\times\dfrac{5}{n+4} = \dfrac{5n}{(n+4)(n+5)}$
- $p\left(N_1 \bigcap B_2\right) = \dfrac{5}{n+5}\times\dfrac{n}{n+4} = \dfrac{5n}{(n+4)(n+5)}$

Donc $p\left(B_1 \bigcap N_2\right) = p(N_1 \bigcap B_2)$

Item c. **Réponse F**

- $P(X_n = 5) = p\left(N_1 \bigcap N_2\right) = \dfrac{20}{(n+4)(n+5)}$
- $p(X_n = -7) = p\left(B_1 \bigcap N_2\right) + p\left(N_1 \bigcap B_2\right) = \dfrac{10n}{(n+4)(n+5)}$
- $p(X_n = 10) = p\left(B_1 \bigcap B_2\right) = \dfrac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$

Donc $E(X_n) = 5 \times \dfrac{20}{(n+4)(n+5)} - 7 \times \dfrac{10n}{(n+4)(n+5)} + 10 \times \dfrac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)} = \dfrac{10n^2 - 80n + 100}{(n+4)(n+5)}$

Item d. **Réponse F**

$n \in \mathbb{N}^*$. Le jeu est favorable si et seulement si $E(X_n) \geq 0$ si et seulement si $10n^2 - 80n + 100 \geq 0$.

$\Delta = 2400$, $n_1 = 4 - \sqrt{6} > 4 - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$ et $n_2 = 4 + \sqrt{6} < 4 + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

On fait un tableau de signe de $E(X_n)$ et on obtient $n = 1$ ou $n \geq 7$.

Exercice n°6 : Étude d'une fonction exponentielle.

Item a. **Réponse F**

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x(e^x+2) - 4e^x \times e^x}{(e^x+2)^2} = 1 - \frac{8e^x}{(e^x+2)^2}.$$

Item b. **Réponse V**

- $T_{\ln 2}$: $y = f'(\ln 2) \times (x - \ln 2) + f(\ln 2)$
- $f'(\ln 2) = 1 - \dfrac{8 \times e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2} + 2)^2} = 1 - \dfrac{8 \times 2}{16} = 0$
- $f(\ln 2) = \ln 2 + 2 - \dfrac{4 \times e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} + 2} = \ln 2 + 2 - \dfrac{8}{4} = \ln 2$

Donc $T_{\ln 2}$: $y = \ln 2$

Item c. **Réponse F**

- $f'(x) = \dfrac{(e^x+2)^2 - 8e^x}{(e^x+2)^2} = \dfrac{e^{2x} + 4e^x + 4 - 8e^x}{(e^x+2)^2} = \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 4}{(e^x+2)^2} = \left(\dfrac{e^x - 2}{e^x + 2}\right)^2 \geq 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4e^x}{e^x+2}\right) = 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4e^x}{e^x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4e^x}{e^x}\right) = 4$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On utilise le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}$ et on démontre que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Item d. **Réponse V**

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-4\ln(e^x+2)\right]_0^1=\left(\frac{1}{2}+2-4\ln(e+2)\right)-(-4\ln 3)=\frac{5}{2}+4\ln 3-4\ln(e+2)$$
$$=\frac{5}{2}+4\ln\left(\frac{3}{e+2}\right)$$

Exercice n°7 : Lois à densité

On pose $\Omega_1(0,5\,;0)$, $\Omega_2(0,5\,;0,4)$, $\Omega_3(1\,;0)$.

Item a. **Réponse V**

- ODEF est un trapèze d'aire $A_1=\frac{(4+1)\times 0,4}{2}=5\times 0,2=1$ unité d'aire
- La fonction g est continue, positive sur l'intervalle $I_2=[0\,;4]$ et $\int_0^4 g(x)dx=1$ donc la fonction g est une densité de probabilité sur l'intervalle I_2.

Item b. **Réponse V**

- $h(4)=f(4)=0,2$
- La fonction h est continue, positive sur l'intervalle $J_4=[0\,;4]$
- $\int_0^4 h(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=\frac{2\times 0,8}{2}+\frac{2\times 0,2}{2}=0,8+0,2=1$
- La fonction h est une densité de probabilité sur l'intervalle J_4

Item c. **Réponse F**

Le trapèze $\Omega_1\Omega_2A\Omega_3$ a une aire $A_2=\frac{(0,4+0,8)\times 0,5}{2}=0,6\times 0,5=0,3$.

$$P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq\frac{3}{2}\right)=2\times A_2=0,6.$$

Item d. **Réponse V**

$$P_{X\geq\frac{1}{2}}(X\leq 4)=\frac{P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 4\right)}{P\left(X\geq\frac{1}{2}\right)}=\frac{P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 4\right)}{P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 4\right)}=1.$$

Exercice n°8 : Systèmes

Item a. **Réponse V**

$(\delta): y=-x^2-25$ est l'équation d'une parabole ayant la droite $x=-\frac{b}{2a}=0$ (et donc l'axe des ordonnées) comme axe de symétrie.

Item b. **Réponse F**

$M(x;y)\in(\delta)\bigcap(\Gamma_9)$ si et seulement si ses coordonnées sont solution du système $\begin{cases} y+x^2+25 &= 0 \\ y-10x &= 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+10x+25 &= 0 \\ y &= 10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -5 \\ y &= -50 \end{cases}.$$

Donc (δ) et (Γ_9) ont un unique point d'intersection ayant pour coordonnées $(-5;-50)$.

Item c. **Réponse F**

$$\begin{cases} y+x^2+25 &= 0 \\ y &= (m+1)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(m+1)x+25 &= 0 \\ y &= (m+1)x \end{cases}.$$

$$\Delta_m = b^2-4ac=(m+1)^2-100=(m+1+10)\times(m+1-10)=(m-9)\times(m+11).$$

On fait le tableau de signe de Δ_m :

- Si $m\in\left]-\infty;-11\right[\bigcup\left]9;+\infty\right[$ alors le système admet deux solutions distinctes.
- Si $m\in\left]-11;9\right[$ alors le système n'admet aucune solution.
- Si $m\in\{-11;9\}$ alors le système admet une unique solution.

Item d. **Réponse V**

En reprenant les résultats obtenus à l'item c., si $m\in\left]-11;9\right[$ alors le système n'admet aucune solution.

Exercice n°9 : Petite étude de suite

Item a. **Réponse V**

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2=\ln\left(e\sqrt{u_n}\right)-2=\ln(e)+\frac{1}{2}\times\ln(u_n)-2=\frac{1}{2}\times\ln(u_n)-1=\frac{1}{2}\times(\ln(u_n)-2)$$

$=\frac{1}{2}\times v_n$ avec $v_0=\ln(u_0)-2=\ln(1)-2=-2.$

Item b. **Réponse F**

$$v_n=v_0\times q^n=-2\times\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Item c. **Réponse V**

$$v_n=\ln(u_n)-2\Leftrightarrow\ln(u_n)=v_n+2\Leftrightarrow u_n=e^{v_n+2}=e^2\times e^{v_n}=e^2\times e^{-\frac{1}{2^{n-1}}}=\frac{e^2}{e^{\frac{1}{2^{n-1}}}}.$$

Item d. **Réponse F**

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=(-2)\times\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=-4\times\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}S_n=-4$. La suite (S_n) converge vers -4.

Exercice n°10 : Un peu de logique avec les suites

Item a. **Réponse F**

Si $q=2$ et $u_0=-1$ alors $u_n=u_0\times q^n=-2^n$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.

Item b. **Réponse F**

Si $q=\frac{1}{2}$ et $u_0=-1$ alors $u_n=u_0\times q^n=-\frac{1}{2^n}$. La suite (u_n) est une suite géométrique croissante mais

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0\,.$$

Item c. **Réponse F**

La réciproque du b) est :
" si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors la suite (u_n) est croissante "
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $u_0>0$ et $q>1$. Dans ce cas, la suite (u_n) est bien croissante.

Item d. **Réponse F**

La contraposée du b) a la même valeur de vérité que le b) qui est faux.

Exercice n°11 : Quelques calculs de limites

Item a. **Réponse F**

$$u_n=\frac{2^n+1}{1-2^n}=\frac{2^n}{2^n}\times\frac{1+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}-1}=\frac{1+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}-1}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=-1$ et la suite (u_n) converge vers -1.

Item b. **Réponse F**

Pour tout entier naturel $n\geq 2$, $-1\leq\sin(n)\leq 1 \Leftrightarrow \frac{n+2}{1-n^2}\leq v_n=\frac{n-2\sin(n)}{1-n^2}\leq\frac{n-2}{1-n^2}$
Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{1-n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{1-n^2}=0$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ et la suite (v_n) converge vers 0.

Item c. **Réponse F**

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x}}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{2x}{e^{2x}}+1\right)=1$

Item d. **Réponse V**

Soit f la fonction définie par $f: x\mapsto\ln(x)$. f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $a>0$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$
$f'(x)=\frac{1}{x}$ d'où $\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-\ln(e)}{x-e}=f'(e)=\frac{1}{e}$.

Exercice n°12 : Quelques calculs d'intégrales.

Item a. **Réponse V**

$$\int_0^1 \left(\frac{7}{x+1}-1\right)dx=[7\times\ln|x+1|-x]_0^1=(7\ln(2)-1)-(7\ln(1)-0)=7\ln(2)-1.$$

Item b. **Réponse V**

$$\int_{-1}^1 \frac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}dx=\frac{3}{8}\times\int_{-1}^1\frac{8x}{\sqrt{4x^2+1}}dx=\frac{3}{8}\times\left[2\sqrt{4x^2+1}\right]_{-1}^1=\frac{3}{8}\times\left(2\sqrt{5}-2\sqrt{5}\right)=0.$$

Remarque : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$ *est impaire et on calcule son intégrale sur l'intervalle* $[-1;1]$ *centré en 0 donc* $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$.

Item c. **Réponse V**

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(x)\times\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(2x)\,dx=\frac{1}{2}\times\left[-\frac{1}{2}\times\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{4}\times\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos(0)\right)=-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}-1\right)=\frac{3}{8}$$

Item d. **Réponse V**

$$\int_{e^2}^{e^3}\frac{2}{x\times\ln(x)}dx=2\times\int_{e^2}^{e^3}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}dx=2\times[\ln|\ln(x)|]_{e^2}^{e^3}=2\times\left(\ln\left(\ln\left(e^3\right)\right)-\ln\left(\ln\left(e^2\right)\right)\right)=2\times(\ln 3-\ln 2)=2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Exercice n°13 : Distance d'un point à un plan.

Item a. **Réponse V**

Dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ on a :

- $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H-x_A\\y_H-y_A\\z_H-z_A\end{pmatrix}$ avec $a\,x_H+b\,y_H+c\,z_H+d=0 \Leftrightarrow a\,x_H+b\,y_H+c\,z_H=-d$
- $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{n}\right|&=\left|a(x_H-x_A)+b\left(y_H-y_A\right)+c(z_H-z_A)\right|=\cdots=\left|-a\,x_A-b\,y_A-c\,z_A-d\right|\\&=\left|a\,x_A+b\,y_A+c\,z_A+d\right|\end{aligned}$$

Item b. **Réponse V**

$\left|\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{n}\right|=AH\times\left\|\overrightarrow{n}\right\|=AH\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ donc $AH=\dfrac{\left|\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{n}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\left|a\,x_A+b\,y_A+c\,z_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Item c. **Réponse V**

Dans le repère $(E;\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA})$, on a :

- $E(0;0;0)$, $B(0;1;1)$ et $G(1;1;0)$
- On remarque que les coordonnées des points E, B et G vérifient l'équation $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0$

Donc le plan (EBG) admet une équation cartésienne :

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \Leftrightarrow x-y+z=0$$

Item d. **Réponse V**

- Dans le triangle BIG rectangle en I on a, d'après le théorème de Pythagore, $IB^2=BG^2-IG^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ donc $BI=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$
- L'aire Γ du triangle BEG est égale à

$$\Gamma=\frac{EG\times BI}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Soit Ω le pied de la hauteur issue de D du tétraèdre DBGE.

$$D\Omega=\frac{|x_D-y_D+z_D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

- Le volume V du tétraèdre DBGE est égal à :

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

Exercice n°14 : Étude d'une fonction logarithme

Item a. **Réponse F**

$f(x)$ existe si et seulement si $\left\{\begin{array}{ccc} x & > & 0 \\ x & \neq & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\,]0;1[\bigcup]1;+\infty[$ et $g(x)$ existe si et seulement si $x>0$.

Item b. **Réponse F**

- $g'(x)=-1-\left(2\ln x+2x\times\frac{1}{x}\right)=-1-2\ln x-2=-3-2\ln x$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow -3-2\ln x>0\Leftrightarrow 2\ln x<-3\Leftrightarrow \ln x<-\frac{3}{2}\Leftrightarrow 0<x<e^{-\frac{3}{2}}$
- g est strictement croissante sur $\left]0;e^{-\frac{3}{2}}\right]$ et g est strictement décroissante sur $\left[e^{-\frac{3}{2}};+\infty\right[$

g admet un maximum en $x=e^{-\frac{3}{2}}$ à ne pas confondre avec $e^{-\frac{3}{2}}$ est un maximum pour g (on prendra le temps de vérifier que $g\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\neq e^{-\frac{3}{2}}$).

Item c. **Réponse V**

- $f(x)=\frac{1+\ln x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{x}{x-1}\right)\times\frac{1}{x-1}$.
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

Donc C_f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

$\lim_{x\to0}(x-1)^2=1$ et $\lim_{x\to0}(1+\ln x)=-\infty$ donc $\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$ et C_f admet la droite d'équation $x=0$ comme asymptote verticale.

$\lim_{x\to1}(1+\ln x)=1$ et $\lim_{x\to1}(x-1)^2=0^+$ donc $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$ et C_f admet la droite d'équation $x=1$ comme asymptote verticale.

Item d. **Réponse V**

$x\neq1$ donc

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times(x-1)^2-(1+\ln x)\times2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\times\frac{1}{x}-2(1+\ln x)}{(x-1)^3}=\frac{x-1-2x(1+\ln x)}{x(x-1)^3}=\frac{-x-1-2x\ln x}{x(x-1)^3}=\frac{g(x)}{x(x-1)^3}$$

Exercice n°15 : Notions de base sur les complexes

Item a. **Réponse V**

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^2=2+2\sqrt{3}\,i.$$

Item b. **Réponse V**

- $z_1=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\frac{i\pi}{3}}$
- $z_2=1-i=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$$

Item c. **Réponse V**

- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1+i)}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
- $\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\,sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\,\sqrt{2}\,sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Item d. **Réponse V**

$$Z=\frac{z_2^5}{(\overline{z_1})^4}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^5}{\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4}=\frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{4}}}{4^2e^{-\frac{4i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{i\pi}{12}}$$

Exercice n°16 : Géométrie avec les nombres complexes

Item a. **Réponse V**

$$f(z)=\frac{2(x+iy)-i}{(x+iy)+1-i}=\frac{2x+i(2y-1)}{(x+1)+i(y-1)}=\frac{(2x+i(2y-1))((x+1)-i(y-1))}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$=\dots=\frac{2x^2+2x+(y-1)(2y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}+i\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$Re(f(z))=\frac{2x^2+2x+(y-1)(2y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}=\frac{2x^2+2x+2y^2-3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2} \quad \text{et} \quad Im(f(z))=\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

Item b. **Réponse F**

$f(z)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow Im(f(z))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1 & = & 0 \\ (x;y) & \neq & (-1;1) \end{cases}$. Or $A(-1;1)$ est un point de la droite $\Delta : x+2y-1=0$. Donc l'ensemble des point $M(z)$ tels que $f(z)\in\mathbb{R}$ est la droite Δ privée du point A.

Item c. **Réponse F**

$f(z)$ imaginaire pur si et seulement si $Re(f(z))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2x+2y^2-3y+1 & = & 0 \\ (x;y) & \neq & (-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x^2+x+y^2-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} & = & 0 \\ (x;y) & \neq & (-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 & = & \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ (x;y) & \neq & (-1;1) \end{cases}$

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{5}}{4}$ privé du point A.

Item d. **Réponse V**

- $AB=|z_B-z_A|=\left|1-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$
- $AC=|z_C-z_A|=\left|\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i\right|=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$
- $BC=|z_C-z_B|=\left|-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i\right|=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

On a $AC=BC$ et $AC^2+BC^2=2\times\frac{10}{16}=\frac{5}{4}=AB^2$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

Les pièges et écueils à éviter :

Dans le sujet de concours Puissance Alpha, il est important d'être à l'aise avec les bases du programme :

- les bases du calcul
- les formules sur les aires et volumes
- les identités remarquables
- les outils du second degré
- factoriser et développer rapidement
- résoudre rapidement une équation
- rédiger rapidement un tableau de signe et résoudre une inéquation
- les calculs de dérivées
- étudier rapidement un sens de variation
- les techniques de calculs de limites
- les techniques de calculs des intégrales
- les bases du langage Python

Maîtriser parfaitement tous les théorèmes étudiés au collège et au lycée et ne pas hésiter à prendre le temps de bien lire l'énoncé.

STAGES PRÉPA CONCOURS PUISSANCE ALPHA

LA MEILLEURE PRÉPA PUISSANCE ALPHA

- Un suivi authentique et très humain
- Préparation aux oraux
- S'entraîner aux épreuves en conditions réelles
- Une équipe pédagogique de haut niveau

Préparation concours Puissance Alpha

STAGES PRÉPA CONCOURS PUISSANCE ALPHA EN LIGNE

- Abordez avec sérénité les concours
- Une équipe dédiée à l'écoute de chacun,
- Des méthodes et stratégies exclusives pour les étudiants

Stage en ligne prépa concours Puissance Alpha

https://groupe-reussite.fr/stages/toutes-matieres/prepa-concours-puissance-alpha/france/toutes-periodes/