PUISSANCE ALPHA

Concours Ingénieurs Bac+5

ANNALES

Samedi 27 avril 2024

Bac général : CORRIGÉS DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°1 : Les bases du calcul

Item a. **Réponse V**

$$\begin{aligned} 2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} &= 2-\frac{1}{2-\frac{2}{3}} \\ &= 2-\frac{1}{\frac{4}{3}} \\ &= 2-\frac{3}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Item b. **Réponse V**

$$\begin{aligned} (2+x)^2-(2-x)^2 &= 4+4x+x^2-\left(4-4x+x^2\right) \\ &= 8x \end{aligned}$$

Item c. **Réponse V**

$$\begin{aligned} \frac{4^{2n-1}\times 3^{-3n+1}}{2^{-n-5}} &= \frac{\left(2^2\right)^{2n-1}\times 3^{-3n+1}}{2^{-n-5}} \\ &= \frac{2^{4n-2}\times 3^{-3n+1}}{2^{-n-5}} \\ &= 2^{4n-2+n+5}\times 3^{-3n+1} \\ &= 2^{5n+3}\times 3^{-3n+1} \\ &= 2^3\times 3\times\left(2^5\times 3^{-3}\right)^n \\ &= 24\times\left(\frac{32}{27}\right)^n \end{aligned}$$

Item d. **Réponse V**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$ car $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$.

Si $x < 0$, alors $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

D'où
$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-x+1} - x &= \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \\
&= \frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \\
&= \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \\
&= \frac{-x+1}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-x+1}{-x\times\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} \\
&= \frac{-x}{-x}\times\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} \\
&= \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}
\end{aligned}$$

Exercice n°2 : Le point en géométrie

Item a. **Réponse V**

Le triangle AIC est inscrit dans le cercle de diamètre le segment $[AC]$, il est donc rectangle en I.

Si $\widehat{IAC} = 45°$ alors $\widehat{ACI} = 180° - (90° + 45°) = 45°$.

$\widehat{IAC} = \widehat{ACI} = 45°$ donc le triangle ACI est rectangle et isocèle en I.

Item b. **Réponse F**

Le triangle AIH est rectangle en H avec $AI = 4$ et $\widehat{IAC} = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

$\sin\left(\widehat{IAH}\right) = \frac{IH}{AI}$

$$\begin{aligned} \text{D'où } IH &= AI \times \sin\left(\widehat{IAH}\right) \\ &= 4 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Item c. **Réponse V**

L'aire $\mathscr{A}$ du triangle AIC est égale à :

$\mathscr{A} = \frac{\mathscr{B} \times h}{2} = \frac{AC \times IH}{2} = \frac{10 \times 2}{2} = 10$ unités d'aire.

Item d. **Réponse F**

Le triangle AIC est rectangle en I. D'après le **théorème de Pythagore** :

$$AC^2 = AI^2 + IC^2 \iff IC^2 = AC^2 - AI^2 = 100 - 16 = 84$$

D'où $IC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.

Le triangle AMB est rectangle en M et les droites (MB) et (IC) sont perpendiculaires à la droite (AM) donc elles sont parallèles entre elles.

D'après le **théorème de Thalès**, on a :

$$\frac{AI}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{IC}{MB} \iff \frac{4}{AM} = \frac{10}{30} = \frac{2\sqrt{21}}{MB}$$

D'où $\frac{2\sqrt{21}}{MB} = \frac{1}{3} \iff MB = 6\sqrt{21}$.

Exercice n°3 : Le point sur les vecteurs

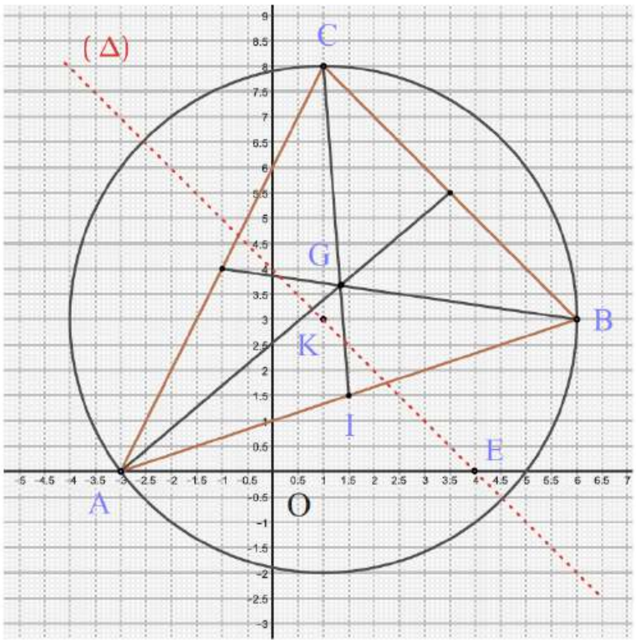
Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$, on définit $A,\ B,\ C$ et K les points ayant pour coordonnées $A\,(-3\,;\,0),\ B\,(6\,;\,3),\ C\,(1\,;\,8)$ et $K\,(x\,;\,y)$ avec x et y deux nombres réels.

K est le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABC et I est le milieu du segment $[AB]$.

La parallèle (Δ) à la droite (CB) passant par K coupe l'axe des abscisses en un point E.

$\overrightarrow{KA}\,(-3-x\,;\,-y)$, $\overrightarrow{KB}\,(6-x\,;\,3-y)$, $\overrightarrow{KC}\,(1-x\,;\,8-y)$.

$\overrightarrow{AB}\,(9\,;\,3)$, $\overrightarrow{AC}\,(4\,;\,8)$, $\overrightarrow{BC}\,(-5\,;\,5)$.



Item a. **Réponse F**

I milieu du segment $[AB]$ donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\\ &= 2\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\\ &= 2\overrightarrow{CI}\end{aligned}$$

En revanche, on vérifie que $AC=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$, $AB=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ et $BC=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Le triangle ABC n'est pas équilatéral, K n'est pas le centre de gravité et $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\neq\overrightarrow{0}$.

Item b. **Réponse V**

$$\begin{aligned} KA^2=KB^2 &\iff (-3-x)^2+(-y)^2=(6-x)^2+(3-y)^2\\ &\iff x^2+6x+9+y^2=45+x^2-12x+y^2-6y\\ &\iff 3x+y-6=0\end{aligned}$$

Item c. **Réponse V**

On reprend le raisonnement du b :

$$\begin{cases} KA^2=KB^2\\ KB^2=KC^2\end{cases} \iff \begin{cases} 3x+y=6\\ 45+x^2-12x+y^2-6y=65+x^2-2x+y^2-16y\end{cases} \iff \begin{cases} 3x+y=6\\ -x+y=2\end{cases}$$

Item d. **Réponse F**

On résout le système précédent et on trouve $K(1\,;\,3)$.

La droite (CB) a pour équation $(CB): y=-x+9$ donc le coefficient directeur de (Δ) est égal à -1 et $(\Delta): y=-x+p$ avec $p\in\mathbb{R}$.

$K(1\,;\,3)\in(\Delta)$, on en déduit son équation $(\Delta): y=-x+4$.

$y_E=0$ d'où $E\,(4\,;\,0)$.

$\overrightarrow{KE}\,(3\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{CB}\,(5\,;\,-5)$ d'où $\overrightarrow{KE}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{CB}\iff 5\overrightarrow{KE}-3\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}\iff 5\overrightarrow{KE}+3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$.

Exercice n°4 : Algorithmique et programmation

Item a. **Réponse V**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, **prog1(n)** calcule la somme $\sum_{k=0}^{n-2} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-2}$.

prog1(3) calcule la somme $\sum_{k=0}^{1} u_k = u_0 + u_1 = 3 + 5 = 8$.

Item b. **Réponse V**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, **prog2(n)** et **prog3(n)** affichent les n premiers termes de la suite (v_k) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence $v_0 = 2$, $v_1 = 3$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+2} = 2v_{k+1} - v_k$.
On obtient la liste $[v_0,\ v_1,\ \cdots,v_{n-1}]$.

Item c. **Réponse V**

Soit (w_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par la relation de récurrence $w_1 = 12$ et $w_{n+1} = \frac{2}{5}w_n$.

prog4(n) détermine la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $w_n \leqslant A$.

Item d. **Réponse V**

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2 - k + 1\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(2(k+1)^2 - (k+1) + 1\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(2k^2 + 3k + 2\right).$$

prog5(n) calcule la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2 - k + 1\right)$ et **prog6(n)** calcule la somme $\sum_{k=0}^{n-1}\left(2k^2 + 3k + 2\right)$.

Exercice n°5 : Géométrie dans l'espace

Item a. **Réponse V**

$ABCD$ est un tétraèdre régulier .

ABD est un triangle équilatéral et I est le milieu du segment $[BD]$ donc les droites (AI) et (BD) sont perpendiculaires.

ABC est un triangle équilatéral et J est le milieu du segment $[BC]$ donc les droites (AJ) et (BC) sont perpendiculaires.

Enfin, BCD est un triangle équilatéral de centre de gravité A' donc :

- les droites (DA') et (BC) sont perpendiculaires
- les droites (CA') et (BD) sont perpendiculaires

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IA'}\right)\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{IA'}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= 0+0=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JA'}\right)\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{JA'}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= 0+0=0\end{aligned}$$

La médiane (AA') est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (BCD), elle est donc perpendiculaire au plan (BCD).

Item b. **Réponse V**

$A\,(0\,;\,0\,;\,3)$, $B\left(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1\right)$, $C\left(-\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{6}\,;\,-1\right)$ et $D\left(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;\,-1\right)$.

- $AB=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+(-4)^2}=\sqrt{8+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$
- $AC=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2+(-4)^2}=\sqrt{2+6+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$
- $AD=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2+(-4)^2}=2\sqrt{6}$
- $BC=\sqrt{\left(-3\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{18+6}=2\sqrt{6}$
- $BD=\sqrt{\left(-3\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$
- $CD=\sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$ABCD$ est un tétraèdre régulier. D'après a) la médiane (AA') est perpendiculaire au plan (BCD) avec A' centre de gravité du triangle BCD.

Item c. **Réponse V**

$A'\left(x\ ;\ y\ ;\ z\right)$ centre de gravité du triangle BCD donc :

$$\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{0}\ .$$

$\overrightarrow{A'B}\left(2\sqrt{2}-x\ ;-y\ ;-1-z\right)$, $\overrightarrow{A'C}\left(-\sqrt{2}-x\ ;-\sqrt{6}-y\ ;-1-z\right)$ et $\overrightarrow{A'D}\left(-\sqrt{2}-x\ ;\sqrt{6}-y\ ;-1-z\right)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{0} &\iff \begin{cases}2\sqrt{2}-x-\sqrt{2}-x-\sqrt{2}-x=0\\ -y-\sqrt{6}-y+\sqrt{6}-y=0\\ -1-z-1-z-1-z=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}-3x=0\\ -3y=0\\ -3-3z=0\end{cases}\\ &\iff A'\,(0\,;0\,;-1)\ \text{ et }\ \overrightarrow{AA'}\,(0\,;0\,;-4)\end{aligned}$$

Item d. **Réponse V**

$\overrightarrow{AA'}\,(0\,;0\,;-4)$ vecteur normal au plan (BCD) donc :

$(BCD):-4z+d=0$ avec $A'\,(0\,;0\,;-1)\in(BCD)$ d'où $-4z_A+d=0 \iff d=-4$.

$(BCD):-4z-4=0$ ou $(BCD):z+1=0$.

Exercice n°6 : Limites

Item a. **Réponse V**

$$\lim_{U\to O}\left(\frac{\sin(U)}{U}\right)=\lim_{U\to O}\left(\frac{\sin(U)-\sin(0)}{U-0}\right)=(\sin)'(0)=\cos(0)=1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(2\times\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}\right)\\ &= 2\times\lim_{U\to O}\left(\frac{\sin(U)}{U}\right)\ \text{ en posant }\ U=\frac{2}{x}\\ &= 2\times 1\\ &= 2\end{aligned}$$

Item b. **Réponse F**

$$\sqrt{16x^2-x-1}-4x=\frac{\left(\sqrt{16x^2-x-1}-4x\right)\left(\sqrt{16x^2-x-1}+4x\right)}{\sqrt{16x^2-x-1}+4x}=\frac{-x-1}{\sqrt{16x^2-x-1}+4x}=\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{16-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+4}\ .$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2-x-1}-4x\right)=-\frac{1}{8}$.

Item c. **Réponse F**

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right) \\ &= \ln\left(e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right)\right) \\ &= \ln\left(e^{2x}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right) \\ &= 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{e^{x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right)\right) = \ln(1) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)\right) = +\infty$.

Item d. **Réponse V**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{e^{x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right)\right) = \ln(1) = 0$.

Exercice n°7 : Études de fonctions

Item a. **Réponse V**

La fonction g est définie et continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

$g'(x) = 1 - e^{x}$ donc si $x > 0$ alors $g'(x) < 0$ avec $g(0) = 2 - 1 = 1 > 0$.

Pour tout $x \neq 0$, on a $g(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^{x}}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{x}}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x)\right) = -\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$.

Item b. **Réponse V**

$g(\alpha) = 0 \iff \alpha + 2 - e^{\alpha} = 0 \iff e^{\alpha} = \alpha + 2$.

$$f(\alpha) = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha + e^{-\alpha}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\alpha}}}{\alpha + \frac{1}{e^{\alpha}}} = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha e^{\alpha} + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}\ .$$

Item c. **Réponse V**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{-x}(x + e^{-x}) - (1 - e^{-x})(1 - e^{-x})}{(x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{x e^{-x} + e^{-2x} - 1 + 2e^{-x} - e^{-2x}}{(x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{x e^{-x} + 2e^{-x} - 1}{(x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{-x}(x + 2 - e^{x})}{(x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \times \frac{e^{-x}(x + 2 - e^{x})}{(x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{x}(x + 2 - e^{x})}{(x e^{x} + 1)^2} \\ &= \frac{e^{x} \times g(x)}{(x e^{x} + 1)^2} \end{aligned}$$

Item d. **Réponse F**

D'après le a) l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha>0$.

Sachant que la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on en déduit le tableau de signes :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

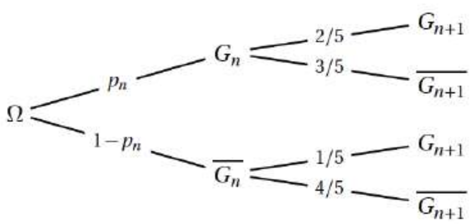
$$f'(x)=\frac{e^{x}\times g(x)}{(x\,e^{x}+1)^2} \quad \text{avec} \quad e^{x}>0 \quad \text{et} \quad (x\,e^{x}+1)^2>0.$$

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

Exercice n°8 : Suites et probabilités

Avec les hypothèses précédentes, on obtient l'arbre pondéré :



Item a. **Réponse F**

Les évènements G_n et $\overline{G_n}$ réalisent une partition de l'univers Ω.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1}=P(G_{n+1}) &= P(G_{n+1}\cap G_n)+P\left(G_{n+1}\cap\overline{G_n}\right) \\ &= P_{G_n}(G_{n+1})\times P(G_n)+P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})\times P\left(\overline{G_n}\right) \\ &= \frac{2}{5}\times p_n+\frac{1}{5}\times(1-p_n) \\ &= \frac{1}{5}p_n+\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Item b. **Réponse F**

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{1}{4} \quad = \quad \frac{1}{5}p_n+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{5}u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de 1er terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Item c. **Réponse V**

$u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

$p_n = u_n + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

Item d. **Réponse F**

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

Il est donc faux d'affirmer que Paul finira par avoir plus de chances de gagner que de perdre à ce jeu s'il joue suffisamment.

Exercice n°9 : Équations différentielles

Item a. **Réponse V**

$g : x \mapsto 20x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

$g'(x) = \cdots = (-10x + 20)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

D'où $g'(x) + \frac{1}{2}g(x) = (-10x + 20 + 10x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

La fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Item b. **Réponse F**

$(E') \iff y'(x) = -\frac{1}{2}y(x) \iff y(x) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Item c. **Réponse F**

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E) &\iff (h-g) \text{ solution de } (E') \\ &\iff h(x) - g(x) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \\ &\iff h(x) = g(x) + k\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \\ &\iff h(x) = (20x + k)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

De plus $h(0) = 10 \iff k\,\mathrm{e}^0 = 10 \iff k = 10$.

D'où $h(x) = (20x + 10)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

La température en degrés Celsius, après une heure d'attente est égale à $h(1) = 30\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{30}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Item d. **Réponse F**

$h'(x) = \cdots = (-10x+15)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

$h\left(\frac{3}{2}\right) = 40\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{40}{\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}}$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	10	$\nearrow$	$\dfrac{40}{\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}}$	$\searrow$	0

Exercice n°10 : Le point sur les suites

Item a. **Réponse V**

$u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $u_2 = 1,5 \times u_1 - 0,5 \times u_0 = 3 - 0,5 = 2,5$.

D'où $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $v_1 = u_2 - u_1 = 2,5 - 2 = 0,5$.

Item b. **Réponse F**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= 1,5u_{n+1} - 0,5u_n - u_{n+1} \\ &= 0,5u_{n+1} - 0,5u_n \\ &= 0,5\,(u_{n+1} - u_n) \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

Item c. **Réponse V**

$v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Item d. **Réponse F**

Le programme prog(n) calcule la valeur de v_{n+1}.

Exercice n°11 : Le point sur les matrices

Item a. **Réponse F**

$$A \cdot P \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Item b. **Réponse V**

On vérifie, par le calcul, que $P^{-1} \cdot P = P \cdot P^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Item c. **Réponse F**

On vérifie, par le calcul, que $P \cdot M = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A \cdot P$.

Item d. **Réponse V**

On démontre par récurrence la relation :

Initialisation :

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \,.$$

Hérédité :

Pour tout entier naturel k non nul on a :

$$A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & k & k(k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & (k+1)(k+2) \\ 0 & 1 & 2(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n°12 : Le point sur les nombres complexes

Item a. **Réponse V**

$(z^2+1)(z^2+2\sqrt{3}z+7)=\cdots=P(z)$.

Item b. **Réponse F**

$$\begin{aligned} P(z)=0 &\iff (z^2+1)(z^2+2\sqrt{3}z+7)=0 \\ &\iff z^2+1=0 \quad \text{ou} \quad z^2+2\sqrt{3}z+7=0 \\ &\iff z=\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=-\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=-\sqrt{3}-2\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=-\sqrt{3}+2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Item c. **Réponse F**

Soit $E(z_E)$ le milieu du segment $[CD]$.

$z_E=\dfrac{z_C+z_D}{2}=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

$EA=\left|\mathrm{i}+\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=\left|\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right|=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$

$EB=\left|-\mathrm{i}+\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=\sqrt{3}\neq EA$

Item d. **Réponse F**

$CA=|z_A-z_C|=\left|\mathrm{i}+\sqrt{3}\right|=2$

$CB=|z_B-z_C|=\left|-\mathrm{i}+\sqrt{3}\right|=2$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) &= arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CB}}}{z_{\overrightarrow{CA}}}\right) \\ &= arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right) \\ &= arg\left(\frac{-\mathrm{i}+\sqrt{3}}{\mathrm{i}+\sqrt{3}}\right) \\ &= \cdots = arg\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Exercice n°13 : Étude de fonctions logarithme Népérien

Item a. **Réponse F**

$f(1)=1+1+\frac{\ln(1)}{1}=2$ et $g(1)=1-1-2\ln(1)+1=1.$

Γ_1 est la courbe représentative de la fonction g.

Item b. **Réponse V**

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{e}\right) &= \sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{\ln\left(\sqrt{e}\right)}{\left(\sqrt{e}\right)^2} \\ &= \sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{\frac{1}{2}\ln(e)}{e} \\ &= \sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{2e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)+\frac{e^{-1}}{2} &= \sqrt{e}+e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2e} \\ &= \sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{2e} \\ &= f\left(\sqrt{e}\right) \end{aligned}$$

Item c. **Réponse V**

$(x-1)\left(3x^2+3x+2\right)=3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2=3x^3-x-2.$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2-1-\frac{2}{x} \\ &= \frac{3x^3-x-2}{x} \\ &= \frac{(x-1)\left(3x^2+3x+2\right)}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x^2}+\ln(x)\times\left(-2x^{-3}\right) \\ &= 1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^3-x+1-2\ln(x)}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

Item d. **Réponse V**

La courbe représentative de la fonction g est la courbe Γ_1.

Γ_1 est parallèle à Δ en $x=a$ si et seulement si $g'(a)=-1$.

$$\begin{aligned} g'(a)=-1 &\iff \frac{(a-1)\left(3a^2+3a+2\right)}{a}=-1 \\ &\iff 3a^3-a-2=-a \\ &\iff 3a^3=2 \\ &\iff a^3=\frac{2}{3} \\ &\iff a=\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Exercice n°14 : Étude d'une fonction exponentielle

Item a. **Réponse F**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)-\left(e^{3x}+1\right)\times 2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \\ &= \frac{3e^{5x}-3e^{3x}-2e^{5x}-2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \\ &= \frac{e^{5x}-3e^{3x}-2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \end{aligned}$$

Item b. **Réponse V**

On a :

- $\left(e^{2x}-1\right)^2=(e^x-1)^2(e^x+1)^2$
- $$\begin{aligned}(e^x+1)^2\left(e^{3x}-2e^{2x}\right) &= \left(e^{2x}+2e^x+1\right)\left(e^{3x}-2e^{2x}\right) \\ &= e^{5x}-2e^{4x}+2e^{4x}-4e^{3x}+e^{3x}-2e^{2x} \\ &= e^{5x}-3e^{3x}-2e^{2x}\end{aligned}$$

D'où $f'(x)=\dfrac{(e^x+1)^2\left(e^{3x}-2e^{2x}\right)}{(e^x+1)^2(e^x-1)^2}=\dfrac{e^{3x}-2e^{2x}}{(e^x-1)^2}$

Item c. **Réponse V**

$$\begin{aligned} f'(x_A)=0 &\iff \frac{e^{3x_A}-2e^{2x_A}}{(e^{x_A}-1)^2}=0 \\ &\iff e^{3x_A}-2e^{2x_A}=e^{2x_A}(e^{x_A}-2)=0 \text{ avec } x_A>0 \\ &\iff e^{x_A}-2=0 \text{ avec } x_A>0 \\ &\iff x_A=\ln(2) \end{aligned}$$

Item d. **Réponse F**

$$\begin{aligned} f(x)=-1 &\iff \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}-1}=-1 \\ &\iff e^{3x}+1=-e^{2x}+1 \text{ avec } x\neq 0 \\ &\iff e^{3x}+e^{2x}=0 \text{ avec } x\neq 0 \end{aligned}$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{3x}+e^{2x}>0$.

L'équation $f(x)=-1$ n'admet aucune solution.

Exercice n°15 : Probabilités et variables aléatoires

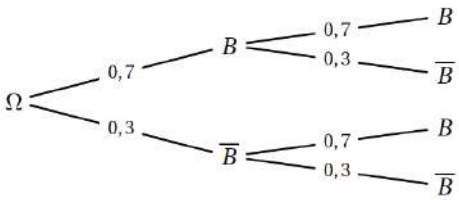
Item a. **Réponse F**

$E(X) = 0,1 \times 0 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,4 = 0,5 + 0,8 = 1,3$

En moyenne, on a 1,3 clients les cinq premières minutes.

Item b. **Réponse V**

Soit B l'évènement : " le client achète une baguette ". Les choix des deux clients sont indépendants d'où :



$$
\begin{aligned}
P_{C_2}(E) &= P\left(B\,;\,\overline{B}\right) + P\left(\overline{B}\,;\,B\right) \\
&= 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 \\
&= 0,42
\end{aligned}
$$

Item c. **Réponse F**

Les évènements C_0, C_1 et C_2 réalisent une partition de l'univers Ω.

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(C_0 \cap E) + P(C_1 \cap E) + P(C_2 \cap E) \\
&= P(C_1 \cap E) + P(C_2 \cap E) \\
&= P_{C_1}(E) \times P(C_1) + P_{C_2}(E) \times P(C_2) \\
&= 0,7 \times 0,5 + 0,42 \times 0,4 \\
&= 0,35 + 0,168 \\
&= 0,518
\end{aligned}
$$

Item d. **Réponse V**

Entre 9h et 9h05, la boulangerie a vendu une unique baguette. La probabilité d'avoir eu deux clients est :

$$
\begin{aligned}
P_E(C_2) &= \frac{P(C_2 \cap E)}{P(E)} \\
&= \frac{P_{C_2}(E) \times P(C_2)}{P(E)} \\
&= \frac{0,42 \times 0,4}{0,518} \\
&= \frac{0,168}{0,518} \\
&= \frac{168}{518} \\
&= \frac{12}{37}
\end{aligned}
$$

Exercice n°16 : Le point sur la dérivation

Item a. **Réponse F**

- $f(0)=0$
- $f'(0)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x=0$. Graphiquement $f'(0)=-3$.
- De même, $f'(-3)=f'(1)=0$

Item b. **Réponse F**

Le signe de $f'(x)$ nous donne le tableau de variation de la fonction f :

x	-4		-3		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	9	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

La courbe représentative de la fonction f' est la courbe $\mathscr{C}_1$.

Item c. **Réponse V**

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ et $f'(x)=3ax^3+2bx+c$.

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} d=0 \\ c=-3 \end{cases}$$

Item d. **Réponse V**

$f(x)=ax^3+bx^2-3x$ et $f'(x)=3ax^3+2bx-3$.

$$\begin{cases} f(3)=9 \\ f(-3)=9 \end{cases} \iff \begin{cases} 27a+9b-9=9 \\ -27a+9b+9=9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3a+b=2 \\ -3a+b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=1 \end{cases}$$

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x$ et $y_B=f(1)=\dfrac{1}{3}+1-3=-\dfrac{5}{3}$.

Exercice n°17 : Phénomènes aléatoires

	A	B	C	D	E
1					
2		Tableau des effectifs			
3					
4		T	J	P	Total
5	H	9	9	12	30
6	F	9	6	5	20
7	Total	18	15	17	50

Item a. **Réponse F**

Il y a 20 adhérentes. Parmi les 20 Femmes, 5 vont à la Piscine.

La fréquence des Femmes allant à la Piscine est de $\frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$

Item b. **Réponse V**

Il y a 15 adhérents qui pratiquent le Judo. Parmi les 15 adhérents, 6 sont des Femmes.

$\frac{6}{15} = 0,4 = 40\%$ des adhérents pratiquant du Judo sont des Femmes.

Item c. **Réponse V**

Il y a 18 adhérents qui pratiquent le Tennis sur 50 ce qui représente une fréquence marginale de $\frac{18}{50} = 0,36$.

Item d. **Réponse V**

Il y a 30 adhérents masculins. Parmi les adhérents masculins, 9 pratiquent le Judo ce qui représente une probabilité conditionnelle égale à $p_1 = \frac{9}{30} = 0,3$.

Il y a 20 adhérentes. Parmi les adhérentes, 6 pratiquent le Judo ce qui représente une probabilité conditionnelle égale à $p_2 = \frac{6}{20} = 0,3$.

Donc la probabilité de faire du Judo sachant que l'adhérent est un Homme est égale à la probabilité de faire du Judo sachant que l'adhérent est une Femme.

Exercice n°18 : Suite et géométrie

Item a. **Réponse V**

$A_2 = \frac{1}{2} \times \pi\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2\right) = \frac{5\pi}{8}$.

Item b. **Réponse F**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_n = \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right) = \cdots = \frac{\pi}{8}(2n+1)$.

Item c. **Réponse F**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_{n+1} - A_n = \frac{\pi}{8}(2n+3-(2n+1)) = \frac{\pi}{4}$.

Item d. **Réponse V**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_n = \frac{\pi}{8}(2n+1)$.

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = \cdots = 6\pi$.

Exercice n°19 : Croissance exponentielle

Item a. **Réponse F**

$q = 0,4$ donc la fonction f est décroissante.

Item b. **Réponse V**

$f(4) = \frac{875}{8} \times 0,4^4 = 875 \times \frac{10^{-4} \times 2^8}{2^3} = 875 \times 10^{-4} \times 2^5 = 10^{-4} \times 32 \times 875 = 2,8$.

$4h$ après l'arrêt du chauffage, nous aurons donc perdu, environ, $3°C$.

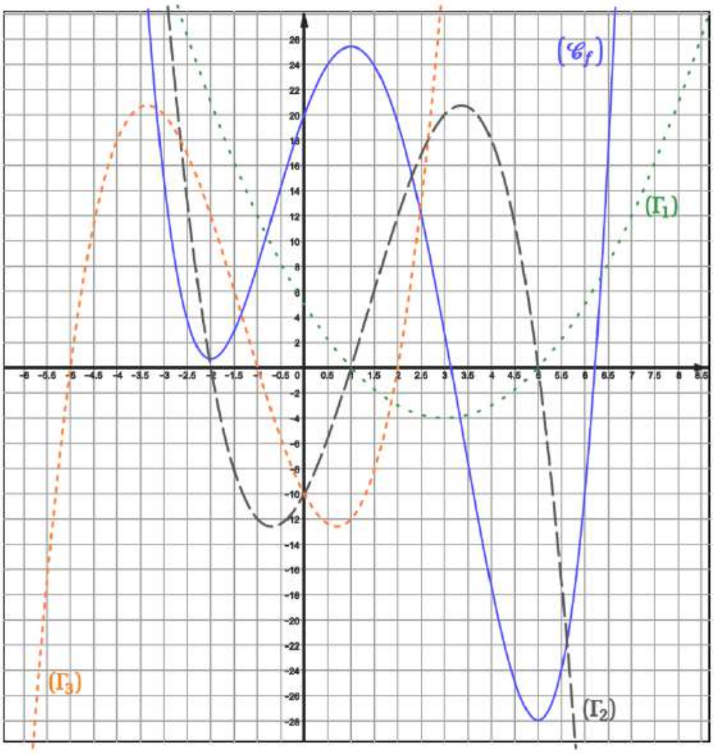
Item c. **Réponse V**

$100 \times 1,02^3 = 106,1208 \approx 106€$.

Item d. **Réponse F**

$C_{n+1} = 1,02 \times C_n$ donc la suite est géométrique de raison $q = 1,02$.

Exercice n°20 : Variation instantanée - Variation globale



Item a. **Réponse F**

$f'(x) = \cdots = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ et $(x-1)(x+2)(x-5) = \cdots = x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = f'(x)$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{305}{12}$	$\searrow$	$-\frac{335}{12}$	$\nearrow$	

Or, pour tout $x \in]-2\,;\,1[$, $g_2(x) < 0$ ce qui est impossible.

Item b. **Réponse F**

On reprend l'étude de signes des fonctions g_1 et g_3 sur $\mathbb{R}$ et on vérifie que le signe de $f'(x)$ ne correspond avec aucune des fonctions g_1 et g_3 .

Item c. **Réponse V**

Le coefficient directeur de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x = -1$ est le nombre $f'(-1) = \cdots = 12$ donc les droites (T) et Δ sont parallèles.

Item d. **Réponse V**

On vérifie que la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x = 2$ a pour équation $y = -12x + \dfrac{130}{3}$.

Exercice n°21 : Équations du second degré

$P(x)=(1-2m)x^2-4mx+1$ avec $m \neq \frac{1}{2}$.

$\Delta_m = b^2-4ac=(-4m)^2-4(1-2m)=16m^2+8m-4$

Le nombre de solutions de l'équation (E) dépend du signe de Δ_m.

Δ_m est, aussi, un polynôme du second degré avec $\Delta = 64-4\times 16\times(-4)=320$.

Δ_m possède deux racines $m_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $m_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

On en déduit le signe de Δ_m :

m	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Δ_m		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

Item a. **Réponse F**

(E) admet une unique solution si et seulement si $m \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{4} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}$.

Item b. **Réponse F**

La fonction P change de variations en $x=-\frac{b}{2a}=\frac{4m}{2(1-2m)}=\frac{4m}{2-4m}$.

Item c. **Réponse V**

La courbe représentative (Γ) de la fonction P admet un sommet S de coordonnées :

$$S\left(-\frac{b}{2a}=\frac{4m}{2-4m} ; -\frac{\Delta}{4a}=-\frac{16m^2+8m-4}{4(1-2m)}=\frac{-16m^2-8m+4}{4-8m}\right)$$

Si $m<\frac{1}{2}$ alors $1-2m>0$ et $-\frac{\Delta}{4a}=\frac{-16m^2-8m+4}{4-8m}$ est un minimum pour $P(x)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)\geqslant -\frac{\Delta}{4a}=\frac{-16m^2-8m+4}{4-8m}$.

Item d. **Réponse V**

D'après le tableau de signes de Δ_m, on en déduit que si $m\in\left]\frac{-1-\sqrt{5}}{4} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right[$ alors $\Delta_m<0$ et le polynôme $P(x)$ est toujours du signe de $a=1-2m$.

De plus, si $m\in\left]\frac{-1-\sqrt{5}}{4} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right[$ alors $m<\frac{1}{2}$ et $a=1-2m>0$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)>0$.

Exercice n°22 : Le point sur les suites

Item a. **Réponse V**

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}-1}{u_n-1} &= \frac{1+(-1)^{n+1}\times\dfrac{5}{2^n}-1}{1+(-1)^n\times\dfrac{5}{2^{n-1}}-1}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\times\frac{5}{2^n}\times\frac{2^{n-1}}{5}\\
&= -2^{n-1-n}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1}$ est indépendant de n.

Item b. **Réponse F**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad v_n>0$.

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}\\
&= \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}\times\frac{3^{2n}}{2^{3n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{3n+3-3n}\times 3^{2n-2n-2}\\
&= 2^3\times 3^{-2}\\
&= \frac{8}{9}<1
\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

Item c. **Réponse F**

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= \frac{s_{n+1}-1}{s_{n+1}+2}\\
&= \frac{\frac{2s_n+2}{s_n+3}-1}{\frac{2s_n+2}{s_n+3}+2}\\
&= \frac{\frac{2s_n+2-s_n-3}{s_n+3}}{\frac{2s_n+2+2s_n+6}{s_n+3}}\\
&= \frac{s_n-1}{s_n+3}\times\frac{s_n+3}{4s_n+8}\\
&= \frac{s_n-1}{4s_n+8}\\
&= \frac{1}{4}\frac{s_n-1}{s_n+2}\\
&= \frac{1}{4}t_n
\end{aligned}$$

La suite (t_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{4}$ et de 1er terme $t_2=\dfrac{2}{5}$.

Item d. **Réponse V**

La suite (t_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{4}$ donc $t_n=t_2\times q^{n-2}=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2^{2n-5}}$.

$$\begin{aligned}
t_n=\frac{s_n-1}{s_n+2} &\iff s_n-1=t_n(s_n+2)\\
&\iff s_n-s_n\times t_n=2t_n+1\\
&\iff s_n(1-t_n)=1+2t_n\\
&\iff s_n=\frac{1+2t_n}{1-t_n}\\
&\iff s_n=\frac{1+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2^{2n-6}}}{1-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2^{2n-5}}}
\end{aligned}$$

Exercice n°23 : Vecteurs et produit scalaire

Item a. **Réponse V**

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}$$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}\right)\cdot\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM}$.

Item b. **Réponse F**

Dans le repère $\left(D\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ on a :

$D\ (0\,;\,0)$, $P\ (x\,;\,a)$, $Q\ \left(0\,;\,a-y\right)$, $M\ \left(x\,;\,a-y\right)$, $C\ (a\,;\,0)$ et $A\ (0\,;\,a)$.

$\overrightarrow{AQ}\ \left(0\,;\,-y\right)$, $\overrightarrow{CM}\ \left(x-a\,;\,a-y\right)$ et $\overrightarrow{AP}\ (x\,;\,0)$.

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM}=-y(a-y)$ et $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CM}=x(x-a)$.

Item c. **Réponse V**

La droite (DB) a pour équation $y=x$ donc $M\ (x\,;\,x)$.

Soit $a-y=x$ et $x-a=-y$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MC}\\
&= \overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CM}\\
&= -y(a-y)-x(x-a)\\
&= -y(a-y)-(a-y)\times(-y)\\
&= -y(a-y)+y(a-y)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Les droites (PQ) et (CM) sont perpendiculaires.

Item d. **Réponse V**

Dans le triangle PMQ rectangle en M on a :

$$\tan\left(\widehat{QPM}\right)=\frac{QM}{PM}$$

$$\begin{aligned}
\tan\left(\widehat{QPM}\right)=\frac{QM}{PM} \quad &\Longleftrightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{x}{y}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{y}\\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{\sqrt{3}}{3}y \quad \text{avec} \quad y=a-x\\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{\sqrt{3}}{3}(a-x)\\
&\Longleftrightarrow \quad x+\frac{\sqrt{3}}{3}x=\frac{\sqrt{3}}{3}a\\
&\Longleftrightarrow \quad x\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}a\\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}a
\end{aligned}$$

Exercice n°24 : Études de fonctions exponentielles

Item a. **Réponse F**

$g'(x)=\cdots=(-x-1)\mathrm{e}^x$ avec $\mathrm{e}^x>0$, on en déduit le tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-1}-1<0$	$\searrow$	

Donc la fonction g admet $\frac{1}{\mathrm{e}}-1$ comme maximum en $x=-1$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)<0$.

Item b. **Réponse F**

$f'(x)=\cdots=-\frac{x\,\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x-1)^2}=\frac{g(x)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Item c. **Réponse V**

$h(x) = f'(x) = \dfrac{-x\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(-\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x - 1)^2 - (-x\,\mathrm{e}^x - 1)\left(2\,\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^x\right)}{(\mathrm{e}^x - 1)^4} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x(-1-x)(\mathrm{e}^x - 1) - 2(-x\,\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x((-1-x)(\mathrm{e}^x - 1) - 2(-x\,\mathrm{e}^x - 1))}{(\mathrm{e}^x - 1)^3} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x(-\mathrm{e}^x + 1 - x\,\mathrm{e}^x + x + 2x\,\mathrm{e}^x + 2)}{(\mathrm{e}^x - 1)^3} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x((x-1)\,\mathrm{e}^x + x + 3)}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}
\end{aligned}$$

Item d. **Réponse V**

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $h'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse $x = a$.

$h'(1) = \cdots = \dfrac{4\,\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^3}$ donc $\mathscr{C}_h$ admet une tangente parallèle à la droite $\Delta : y = \dfrac{4\,\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^3}x - 2$ au point d'abscisse $x = 1$.

Les pièges et écueils à éviter :

Dans le sujet de concours Puissance Alpha, il est important d'être à l'aise avec les bases du programme :

- **les bases du calcul**
- **les formules sur les aires et volumes**
- **les identités remarquables**
- **les outils du second degré**
- **factoriser et développer rapidement**
- **résoudre rapidement une équation**
- **rédiger rapidement un tableau de signes et résoudre une inéquation**
- **les calculs de dérivées**
- **étudier rapidement un sens de variation**
- **les techniques de calculs de limites**
- **les techniques de calculs des intégrales**
- **les bases du langage Python**

Maîtriser parfaitement tous les théorèmes étudiés au collège et au lycée et ne pas hésiter à prendre le temps de bien lire l'énoncé.