PUISSANCE ALPHA

Concours Ingénieurs Bac+5

ANNALES
Samedi 27 avril 2024

Bac technologique :
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 1h30

L'ÉPREUVE **COMPORTE 9 EXERCICES** INDEPENDANTS : **VOUS DEVEZ EN TRAITER 8**

Vous devrez OBLIGATOIREMENT traiter :

- Les **4 exercices** de la partie ***« Fondamentaux »***
- ET **4 exercices** (parmi 5) de la partie ***« Terminale technologique »***

Exercices fondamentaux

☑**Faire les exercices 1 à 4**

ET

Exercices de terminale technologique

☑**Choisir 4 exercices entre les 5 à 9**

*Si vous traitez les 5 exercices dans la partie « Terminale technologique », **seuls les 4 premiers seront corrigés.***

- Un exercice comporte **4 affirmations** repérées par les lettres **a, b, c, d.**
- Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est **vraie (V) ou fausse (F).**
- ***Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée.***

- Une réponse exacte rapporte 1 point.
- Une réponse inexacte entraîne le retrait de 0.5 point.
- Une réponse annulée ou l'abstention de réponse ne rapporte ni ne retire aucun point.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

L'usage de la calculatrice ou de tout appareil électronique est interdit.

PUISSANCE ALPHA

Concours Ingénieurs Bac+5

ANNALES
Samedi 27 avril 2024

Bac technologique :
CORRIGÉS DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°1 : Calcul algébrique

Item a. **Réponse V**
On procède petit à petit : 2024 est pair donc $2024 = 2 \times 1012$, et ainsi de suite jusqu'à $2024 = 2^3 \times 253$.
On reconnaît ici un multiple de 11. En effet, $2 + 3 = 5$ donc $23 \times 11 = 253$.

Item b. **Réponse V**

$$\frac{\sqrt{3}^3 \times \sqrt{12}}{3\sqrt{75}} = \frac{3 \times \sqrt{4 \times 3}}{3\sqrt{25 \times 3}} = \frac{3 \times 2\sqrt{3}}{3 \times 5\sqrt{3}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Item c. **Réponse F**
On développe $(3x - 2)(x + 1)^2 = (3x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 2x^2 - 4x - 2$
Ce qui donne après réduction : $= 3x^3 + 4x^2 - x - 2$

Item d. **Réponse F**
$\frac{5}{3} - \frac{3}{4} = \frac{20}{12} - \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$ d'une part ; $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$ d'autre part.
Les quantités sont donc égales, ce qui est exclu par le caractère strict de l'inégalité.

Exercice n°2 : Un château mystérieux

Item a. **Réponse F**
On travaille d'abord dans le triangle OAB, isocèle en O. Le pentagone $ABCDE$ étant régulier, et O étant son centre, on a $\widehat{AOB} = \frac{360}{5} = 72°$. Puis, sachant que la somme des trois angles font 180° et que $\widehat{OAB} = \widehat{ABO}$, on a $\widehat{ABO} = \frac{180-72}{2} = \frac{108}{2} = 54°$. Par le même raisonnement dans le triangle OBC, on obtient $\widehat{OBC} = 54°$ et donc $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC} = 54 + 54 = 108°$.

Item b. **Réponse F**
Le triangle OAH est rectangle en H. En effet, OAB étant isocèle en O, la médiatrice de $[AB]$ passe par O. Cette médiatrice est confondue avec la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$, ainsi $\widehat{AOH} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{72}{2} = 36°$.
Or $\tan\left(\widehat{AOH}\right) = AH/OH$ ainsi $OH = \frac{AH}{\tan(36°)} = \frac{\frac{x}{2}}{\tan(36°)} = \frac{x}{2\tan(36°)}$.

Item c. **Réponse V**
L'aire du triangle OAB est le double de celle du triangle OAH, qui vaut $\frac{AH\times OH}{2}$.
Ainsi l'aire du triangle OAB vaut $AH \times OH = \frac{x}{2} \times \frac{x}{2\tan(36°)} = \frac{x^2}{4\tan(36°)}$.

Item d. **Réponse V**
L'aire du pentagone $ABCDE$ vaut donc $\frac{5x^2}{4\tan(36°)}$. On applique cette formule avec $x = 17$ et $\tan(36°) \approx 0{,}73$. Le carré de 17 vaut 289 (poser l'opération), puis $4 \times 0{,}73 = 2{,}92$.
L'aire au sol du château vaut donc $5 \times \frac{289}{2{,}92} = 5 \times \left(\frac{292}{2{,}92} - \frac{3}{2{,}92}\right) = 5 \times \left(100 - \frac{3}{2{,}92}\right) = 500 - 5 \times \frac{3}{2{,}92}$
On encadre grossièrement $1 < \frac{3}{2{,}92} < 2$, ce qui donne $5 < 5 \times \frac{3}{2{,}92} < 10$.
On peut ainsi estimer que l'aire au sol du château est comprise entre 490 et 495 m², ce qui rentre dans la fourchette proposée.

Exercice n°3 : Lectures graphiques

Item a. **Réponse F**
$f'(1)$ est le nombre dérivé de f en 1, c'est donc le coefficient directeur de la tangente à la C_f en A. Or, en ce point, la fonction admet un minimum, ce qui est une condition suffisante à une tangente horizontale. Son coefficient directeur est donc nul, ainsi $f'(1) = 0$.

Item b. **Réponse V**
On lit le coefficient directeur de T_4 en appliquant la formule $\frac{\Delta x}{\Delta y}$: on trouve le résultat proposé.

Item c. **Réponse F**
Le coefficient directeur est cohérent avec la précédente réponse. Cependant, l'ordonnée à l'origine proposée est positive, alors qu'une lecture graphique montre que celle-ci est strictement négative.

Item d. **Réponse F**
La fonction f est bien négative sur $[-1; 3]$, mais la fonction f' est négative lorsque f est décroissante. Or sur l'intervalle $[1; 3]$, inclus dans $[-1; 3]$, on observe que f est strictement croissante.

Exercice n°4 : Problème d'optimisation

Item a. **Réponse F**
La boîte est constituée de 6 faces : 2 carrés de côté x, donc d'aire x^2 ; et 4 rectangles identiques de dimensions x et h, donc d'aire xh. La surface totale des faces, valant d'une part 120 cm², vaut également $2x^2 + 4xh$. On a donc $120 = 2x^2 + 4xh$.

Item b. **Réponse V**
On a $V = x^2 \times h$. Mais en utilisant la relation précédente, on peut isoler h et l'exprimer en fonction de x :

$$2x^2 + 4xh = 120 \Leftrightarrow 4xh = 120 - 2x^2 \Leftrightarrow h = \frac{120 - 2x^2}{4x}$$

Ainsi : $V(x) = x^2 \times \frac{120-2x^2}{4x} = \frac{x}{4}(120 - 2x^2) = 30x - \frac{x^3}{2} = 30x - 0{,}5x^3$.

Item c. **Réponse V**
On dérive : $V'(x) = 30 - 1{,}5x^2$.
On résout $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 30 - 1{,}5x^2 = 0 \Leftrightarrow 1{,}5x^2 = 30 \Leftrightarrow x^2 = 20 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$.
On élimine la solution négative, x étant supposé strictement positif. Puis le terme dominant du polynôme du second degré V' étant négatif, on sait que V' est positif entre ses racines, donc sur $\left]0; 2\sqrt{5}\right]$ et négatif sur $\left[2\sqrt{5}; +\infty\right[$. La fonction V est donc croissante sur $\left]0; 2\sqrt{5}\right]$ et décroissante sur $\left[2\sqrt{5}; +\infty\right[$, elle atteint donc bien un maximum en $x = 2\sqrt{5}$.

Item d. **Réponse V**
On calcule $V\left(2\sqrt{5}\right) = 30 \times 2\sqrt{5} - 0{,}5 \times \left(2\sqrt{5}\right)^3 = 60\sqrt{5} - 0{,}5 \times 8 \times 5\sqrt{5} = 60\sqrt{5} - 20\sqrt{5} = 40\sqrt{5}$.

Exercice n°5 : Probabilités

Item a. **Réponse V**
Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) = p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T) = 0{,}1 \times 0{,}97 + 0{,}9 \times 0{,}006 \\ &= 0{,}097 + 0{,}0054 = 0{,}1024 \end{aligned}$$

Item b. **Réponse F**
$p(M) \times p(T) = 0{,}1 \times 0{,}1024 = 0{,}01024$ d'une part ;
$p(M \cap T) = 0{,}097$ d'autre part. On constate que ces valeurs ne sont pas égales.
Autre façon de répondre : $p(T) = 0{,}1024$ d'une part ; $p_M(T) = 0{,}97$ d'autre part.

Item c. **Réponse F**

$$p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}097}{0{,}1024} = \frac{970}{1024}$$

Attention à bien décaler la virgule au numérateur et au dénominateur !

Item d. **Réponse V**

$$p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right) = 0{,}097 + 0{,}9 \times 0{,}994 = 0{,}097 + 0{,}8946 = 0{,}9916 > 99\%$$

On peut également, pour plus de simplicité dans les calculs, calculer la probabilité contraire :

$$P\left(\overline{M} \cap T\right) + p\left(M \cap \overline{T}\right) = 0{,}0054 + 0{,}003 = 0{,}0084 < 1\%$$

Exercice n°6 : Suites

Item a. **Réponse F**
2023 correspond à l'année $n = 0$, mais ce n'est pas le terme initial. Celui-ci vaut $c_0 = 2000$.
Ainsi, $c_n = 2000 + 150n$.

Item b. **Réponse F**
Une augmentation de 5 % correspond à une multiplication par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$. La suite (d_n) est donc géométrique de raison 1,05.

Item c. **Réponse V**
En 2025, année $n = 2$, on calcule $c_2 = 2000 + 150 \times 2 = 2300$.
Puis, de proche en proche, $d_1 = 2000 \times 1{,}05 = 2100$ (10% représentent 200€, donc 5% représentent 100 €). Puis $d_2 = 2100 \times 1{,}05 = 2205$ (10 % représentent 210€, donc 5% représentent 105€).
On constate donc que $c_2 > d_2$

Item d. **Réponse V**
On calcule $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2000 \times \frac{1{,}05^5 - 1}{1{,}05 - 1} = 2000 \times \frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05} = 2000 \times \frac{1{,}05^5 - 1}{\frac{1}{20}} =$
$2000 \times 20 \times (1{,}05^5 - 1) = 40000(1{,}05^5 - 1)$.

Exercice n°7 : Algèbre et logarithme

Item a. **Réponse F**

$$f'(x) = 2e^x - 2 \times (-1) \times e^{-x} = 2e^x + 2e^{-x} \neq f(x)$$

Item b. **Réponse V**

$$\frac{e^2 \times e^{-1,5}}{(e^{-3})^{-1,5}} = \frac{e^{0,5}}{e^{4,5}} = e^{-4}$$

Item c. **Réponse V**

$$\ln(2e) - 2\ln(8) - \ln\left(\frac{1}{16}\right) = \ln(2) + \ln(e) - 2\ln(2^3) - \ln(2^{-4}) = \ln(2) + 1 - 6\ln(2) + 4\ln(2)$$
$$= 1 - \ln(2)$$

Item d. **Réponse V**
On résout cette inéquation sur $\mathbb{R}_+^*$ car pour être valable, on doit avoir $3x > 0$ donc $x > 0$.

$$\ln(3x) > -1 \Leftrightarrow 3x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3e}$$

D'où l'intervalle proposé.

Exercice n°8 : Equation différentielle

Item a. **Réponse V**
L'équation différentielle est : $10^5 \times 10^{-6} \times U' + U = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{10}U' + U = 12 \Leftrightarrow U' + 10U = 120$.
Le solutions s'écrivent $U(t) = \lambda e^{-10t} + \frac{120}{10} = \lambda e^{-10t} + 12$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ensuite, on sait que $U(0) = 0$ donc $\lambda e^{-10\times 0} + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -12$.
Ainsi, $U(t) = -12e^{-10t} + 12$. Ce qui est, à commutation près, le résultat proposé.

Item b. **Réponse F**
Logiquement, on étudie la charge d'un condensateur : la tension aux bornes de celui-ci est censée augmenter et non diminuer… Pour s'en assurer, on dérive :
$U'(t) = -12 \times (-10)e^{-10t} = 120e^{-10t}$. U' est le produit d'un nombre strictement positif avec une exponentielle, strictement positive sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}_+$). U' est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc U est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Item c. **Réponse F**

$$t \to +\infty \Longrightarrow -10t \to -\infty \Longrightarrow e^{-10t} \to 0 \Longrightarrow -12e^{-10t} \to 0 \Longrightarrow 12 - 12e^{-10t} \to 12$$

Item d. **Réponse V**

On résout l'équation :

$U(t) = 6 \Leftrightarrow 12 - 12e^{-10t} = 6 \Leftrightarrow -12e^{-10t} = -6 \Leftrightarrow e^{-10t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -10t = -\ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{10}$.

Exercice n°9 : Nombres complexes

Item a. **Réponse V**

Dans l'expression algébrique de z_1, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur, on obtient :

$$z_1 = \frac{2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i)(5 - i)}{(5 + i)(5 - i)} = \frac{2(15\sqrt{2} - 10\sqrt{2}i - 3\sqrt{2}i - 2\sqrt{2})}{5^2 - i^2} = \frac{2(13\sqrt{2} - 13\sqrt{2}i)}{26} = \frac{13\sqrt{2} - 13\sqrt{2}i}{13}$$
$$= \sqrt{2} - \sqrt{2}i = z_2$$

Item b. **Réponse F**

Calculons le module et un argument de z_2 :

$$|z_2| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

Soit θ un argument de z_2. On a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{Ré(z_2)}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{Im(z_2)}{|z_2|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $\theta = -\frac{\pi}{4}$

On a donc $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et donc $\overline{z_2} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. z_3 est en fait l'opposé de z_2.

Item c. **Réponse F**

$$z_3^4 = \left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^4 = 2^4 e^{i\frac{3\pi}{4}\times 4} = 16e^{i3\pi} = 16 \times (-1) = -16$$

Item d. **Réponse V**

$$z_3 \times z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{i\frac{2\pi}{4}} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i$$

LES PIEGES ET ECUEILS A EVITER

- Les exercices ne sont pas classés par niveau de difficulté et chaque problème est indépendant du précédent.
- Le programme de Mathématiques de terminale est passé en revue, que ce soit celui du tronc commun des filières technologiques ou celui des spécialité STI2D / STL (programme de l'épreuve du Bac). Ceux-ci s'appuient sur les programmes de première. Il faut donc maitriser tout ce qui a été fait pendant les deux années.
- Ne pas hésiter à aller directement sur les exercices dont les thématiques sont mieux maitrisées.
- Prendre du temps pour bien lire les informations et les questions pour éviter les étourderies. Le vocabulaire utilisé est important.