CPE Lyon – EI Purpan – EPMI – ESA – ESCOM – ESEO – HEI – ISA – ISARA-Lyon – ISEN Brest –ISEN Lille – ISEN Toulon – ISEP – LASALLE Beauvais

SELECTION FESIC

ADMISSION en 1ère ANNEE du 1er CYCLE 2010

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Samedi 22 mai 2010 de 14h. à 16h.30

INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

L'usage de la calculatrice est **interdit** ainsi que tout document ou formulaire.

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.

Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).

Toute réponse exacte rapporte un point.

Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.

L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

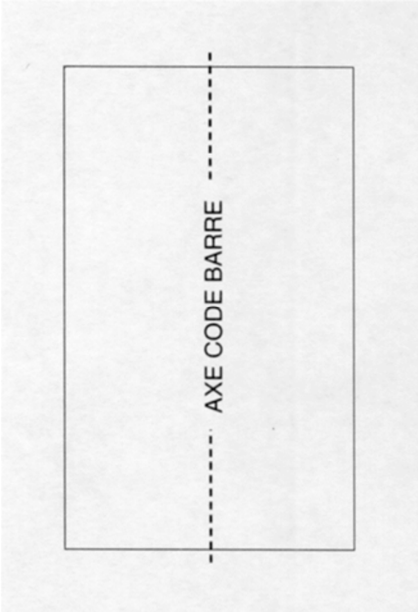
INSTRUCTIONS POUR REMPLIR LA FEUILLE DE REPONSES

Les épreuves de la Sélection FESIC sont des questionnaires à correction automatisée. Votre feuille sera corrigée automatiquement par une machine à lecture optique. Vous devez suivre scrupuleusement les instructions suivantes :

Pour remplir la feuille de réponses, vous devez utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire ou bleue. Ne jamais raturer, ni gommer, **ni utiliser un effaceur**. Ne pas plier ou froisser la feuille.

1. Collez l'étiquette code-barres qui vous sera fournie (le code doit être dans l'axe vertical indiqué). Cette étiquette, outre le code-barres, porte vos nom, prénom, numéro de table et matière. Vérifiez bien ces informations.

Exemple :



2. Noircissez les cases correspondant à vos réponses :


Faire


Ne pas faire

Pour modifier une réponse, il ne faut ni raturer, ni gommer, ni utiliser un effaceur. Annuler la réponse par un double marquage (cocher F et V) puis reporter la nouvelle réponse éventuelle dans la zone tramée (zone de droite). La réponse figurant dans la zone tramée n'est prise en compte que si la première réponse est annulée. Les réponses possibles sont :

V	**F**	**V**	**F**	
●	○	○	○	vrai
○	●	○	○	faux
●	●	○	○	abstention
○	○	○	○	abstention
●	●	●	○	vrai
●	●	○	●	faux
●	●	●	●	abstention

Attention : vous ne disposez que d'une seule feuille de réponses. En cas d'erreur, vous devez annuler votre réponse comme indiqué ci-dessus. Toutefois, en cas de force majeure, une seconde feuille pourra vous être fournie par le surveillant.

Exercice n°1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. On appelle $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de f.

a) $\mathscr{D} =]-1; 1[$.
b) *f est paire.*
c) *f est décroissante sur $\mathscr{D}$.*
d) *Quel que soit le réel b, l'équation $f(x) = b$ possède l'unique solution* $x = \dfrac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}$.

Exercice n°2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{(x+1)}{x}e^{\frac{-1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

a) *f est continue en* 0.
b) *f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \neq 0$, $f'(x)$ est du signe de x.*
c) *$\mathscr{C}$ possède la même droite pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.*
d) *Quel que soit le réel x, on a $f(x) \leq 1$.*

Exercice n°3

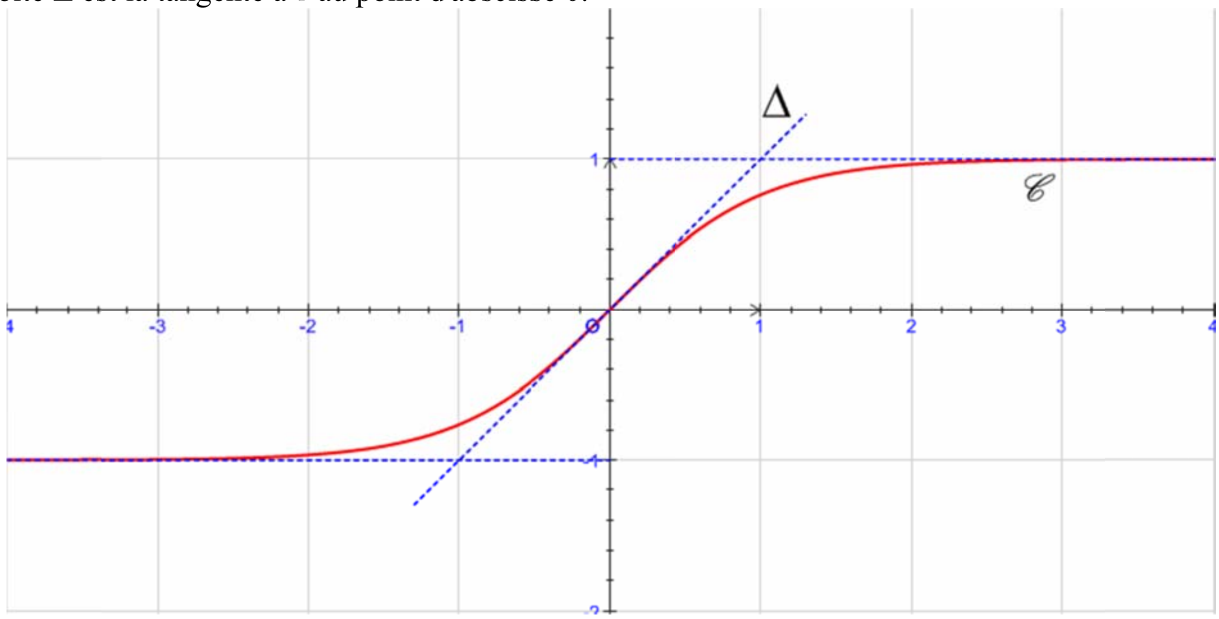
On considère la fonction f, définie sur $[1; +\infty[$ par: $f(t) = \sin(\ln t)$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.
Soit F la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)\cdot dt$.

a) *On a $f(e) = \dfrac{\pi}{2}$.*
b) *Si $t \in [1; e^{\pi}]$, alors on a $f(t) \geq 0$.*
c) $F(e^{\pi})$ *représente l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = e^{\pi}$ et $y = 0$.*
d) *Quel que soit $x \geq 1$, on a $F'(x) \leq 1$.*

Exercice n°4

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle Γ la courbe représentant f et $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction dérivée f' de f. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ de f': $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
La droite Δ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



a) *La courbe Γ de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

c) *La courbe Γ possède une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.*

d) *On a* $f''(0) = 1$.

Exercice n°5

a) $\int_{-5}^{7} |x| \cdot \mathrm{d}x = 12$.

b) $\int_{0}^{1} (2x+5)e^{x} \cdot \mathrm{d}x = 5e - 3$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)(e^{x}-1)}{x} = 2$.

d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\sin^2 x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x\sin^2 x + x^2\cos^2 x$.

Exercice n°6

a) On considère un tétraèdre $ABCD$. On appelle I le milieu de $[AD]$, J celui de $[BC]$, K le barycentre de $\{(A, 2), (B, 1)\}$, L le barycentre de $\{(C, 1), (D, 2)\}$ et G le barycentre de $\{(A, 2), (B, 1), (C, 1), (D, 2)\}$.
On veut montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires. On tient pour cela le raisonnement suivant:
«G est le barycentre de $\{(I, 4), (J, 2)\}$ et de $\{(K, 3), (L, 3)\}$. Donc G, I et J sont alignés, ainsi que G, K et L. On en déduit que I, J, K et L sont coplanaires.»
Ce raisonnement est exact.

b) On considère les deux intégrales $I = \int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} \cdot \mathrm{d}x$ et $J = \int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{1}{e^x + 4} \cdot \mathrm{d}x$.
On veut calculer I et J. On tient pour cela le raisonnement suivant:
«On a $I + J = \int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{e^x + 4}{e^x + 4} \cdot \mathrm{d}x = \ln 8 - \ln 2 = 2\ln 2$. De plus, $I - 3J = \int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{e^x}{e^x + 4} \cdot \mathrm{d}x = \left[\ln(e^x + 4)\right]_{\ln 2}^{\ln 8} =$ $\ln 12 - \ln 6 = \ln 2$. On en déduit $I = \frac{7\ln 2}{4}$ et $J = \frac{\ln 2}{4}$.»
Ce raisonnement est exact.

c) On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^+$ par: $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.
On cherche à savoir si $\mathscr{C}$ possède ou non une demi-tangente au point d'abscisse 0. On tient pour cela le raisonnement suivant:
«On sait que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$ (limite de référence). Comme $f(0) = 0$, c'est que f est continue en 0. De plus on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$. On en déduit que $\mathscr{C}$ possède au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation $x = 0$.»
Ce raisonnement est exact.

d) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère
On cherche à savoir si $\mathscr{C}$ possède ou non une tangente au point d'abscisse 0. On tient pour cela le raisonnement suivant:
«Pour tout $x \neq 0$, on a: $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, donc $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. Or $\lim\limits_{x \to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Comme $f(0) = 0$, c'est que f est continue en 0. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{-1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Or on a $-x \leq 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ si $x > 0$ et $x \leq 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) < -x$ si $x < 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Mais comme $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, alors $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc f n'est pas dérivable en 0. On en déduit que $\mathscr{C}$ ne possède pas de tangente au point d'abscisse 0.»
Ce raisonnement est exact.

Exercice n°7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.
A chaque point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 + z + 1$.
On appelle A le point d'affixe 1 et on note E_0 l'ensemble des points dont l'affixe z est solution de l'équation $z' = 0$.

a) *Pour tout z différent de* 1, *on a* $z' = \dfrac{1-z^3}{1-z}$.

b) *L'ensemble* E_0 *est réduit à deux points B et C symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe* $(O;\vec{u})$.

c) *Quel que soit le point M d'affixe z appartenant à* E_0 *et quel que soit l'entier n,* z^n *est soit l'affixe du point A, soit celle d'un élément de* E_0.

d) *L'ensemble des points M d'affixe z tels que* $z' \in \mathbb{R}$ *est la réunion de deux droites perpendiculaires*.

Exercice n°8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 - 2\,\overline{z} + 1 = 0$.

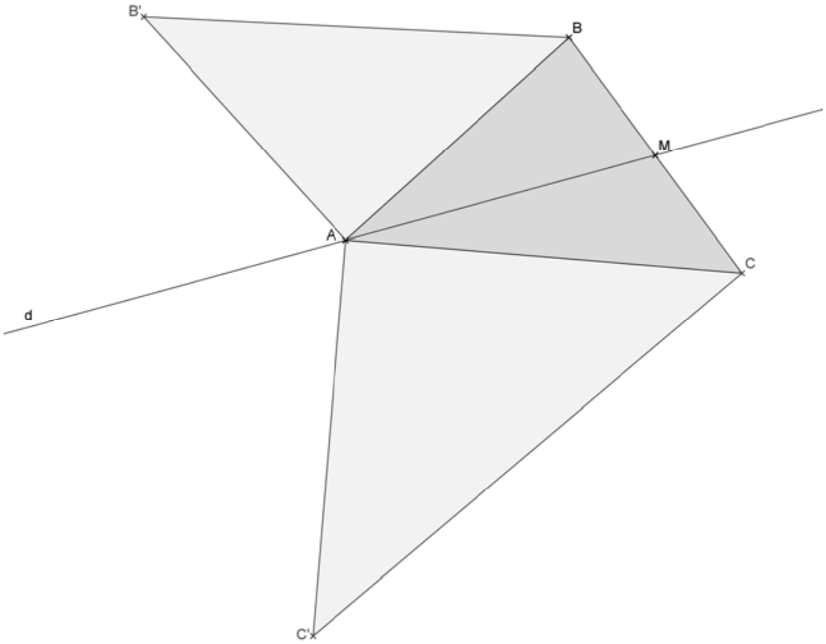
a) *Les complexes* $-1 + 2i$ *et son conjugué sont solutions de* (E).
b) *Cette équation est une équation polynômiale de degré 2 qui possède deux solutions*.
c) *On pose* $z = x + iy$, *x et y étant réels. Si z est solution de* (E), *alors* $y^2 = (x-1)^2$.
d) *La somme des solutions de* (E) *est égale à* -1.

Exercice n°9

On considère un triangle ABC et le point M milieu de $[BC]$.

On appelle B' l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

On munit le plan complexe d'un repère de centre A dans lequel B, C, B', C' et M ont les affixes respectives b, c, b', c' et m.



a) $c' + ic = 0$ *et* $b' - ib = 0$.

b) $\frac{c'-b'}{m} = -2i$.

c) (AM) *et* $(B'C')$ *sont perpendiculaires*.

d) $B'C' = 2AM$.

Exercice n°10

Soient $a \in \mathbb{R}$ et φ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle [E]: $y' + ay = \varphi(x)$.

a) *Si* φ *est définie par* $\varphi(x) = x^3 - 1$, *alors quel que soit le réel a, il existe un polynôme de degré 2, solution de* [E].

b) *Si* φ *est définie par* $\varphi(x) = e^{2x}$, *alors quel que soit le réel a, il existe* $b \in \mathbb{R}$ *tel que la fonction f, définie par* $f(x) = be^{2x}$ *soit solution de* [E].

c) *Si* φ *est la fonction constante nulle et si f est une solution de* [E], *alors la courbe représentant f possède au point d'abscisse* 0 *une tangente d'équation* $y = (1 - ax)f(0)$.

d) *Si* $a = 0$, *alors quelle que soit la fonction* φ *définie et continue sur* $\mathbb{R}$, [E] *possède une solution*.

Exercice n°11

On considère la suite u définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) u_n$.

a) *La suite u est géométrique de raison* $\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) *Quel que soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$.

c) *La suite u est décroissante à partir de* $n = 2$.

d) *La suite u est convergente.*

Exercice n°12

On considère la fonction f, définie sur $I =]-\infty; 3[$ par $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$.

Soit u la suite définie par $u_0 = 1{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) *f est croissante.*

b) *u est croissante.*

c) *Quel que soit* $n \in \mathbb{N}$, *on a*: $1 < u_n < 2$.

d) *Si u est convergente et si l est sa limite, alors l est solution de l'équation* $f(x) = x$.

Exercice n°13

On considère la suite u définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n^2$. On admettra que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

On considère alors la suite v définie par $v_n = \ln\left(\sqrt{2}u_n\right)$.

a) *La suite v est géométrique.*

b) $v_{10} = -512 \times \ln 2$.

c) *Quel que soit* $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = (\ln 2)(1 - 2^n)$.

d) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

Exercice n°14

On dispose de quatre urnes numérotées de 1 à 4. Les urnes sont composées ainsi:

- Urne U_1: 1 boule bleue et 3 boules rouges;
- Urne U_2: 2 boules bleues et 4 boules rouges;
- Urne U_3: 3 boules bleues et 5 boules rouges;
- Urne U_4: 6 boules rouges.

Un joueur choisit une urne au hasard, puis prélève une boule au hasard de cette urne. Le joueur est gagnant s'il tire une boule bleue; il est perdant sinon.

On désigne par:

- Ω l'univers des possibilités et p la probabilité associée;
- p_A la probabilité conditionnée par un événement A de Ω;
- G l'événement: «le joueur gagne»;
- U_i l'événement: «le joueur choisit l'urne U_i».

a) $p_{U_1}(G) = \frac{2}{3} p_{U_3}(G)$.

b) $p(G) = \frac{9}{8}$.

c) $p(U_1) = \frac{1}{6}$.

d) $p_{U_2}(G) = p_G(U_2)$.

Exercice n°15

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 4, 3)$, $C(-2, 1, 3)$ et $D(5, 4, -3)$.

On appelle K le barycentre de $\{(C, 1); (D, -2)\}$ et J le milieu de $[BC]$.

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

a) *Dans le triangle ABC, les médianes se coupent au point de coordonnées* $(-2, 7, 9)$.

b) *Les coordonnées de K sont* $(-12, -7, 9)$.

c) *Une équation paramétrique du segment* $[KJ]$ *est* $\begin{cases} x = 12 - 9t \\ y = 7 - 3t \\ z = -9 + 8t \end{cases}$, *où* $t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

d) *Une équation du plan perpendiculaire à* (KJ) *passant par A est* $9x + 3y - 8z + 9 = 0$.

Exercice n°16

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Soient $A(1, 1, 1)$, $B(3, 5, -3)$ et $C(1, -4, 2)$.

a) *A et B sont deux points de* $\mathscr{P}$.

b) $\mathscr{D}$ *est perpendiculaire à* $\mathscr{P}$.

c) *La distance de C à* $\mathscr{P}$ *est* $\sqrt{5}$ *(en unités de repère).*

d) *L'ensemble des points* $M(x, y, z)$ *tels que* $(x - 1)(x - 3) + (y - 1)(y - 5) + (z - 1)(z + 3) = 0$ *est la sphère de diamètre* $[AB]$.

STAGES PRÉPA CONCOURS PUISSANCE ALPHA

LA MEILLEURE PRÉPA PUISSANCE ALPHA

- Un suivi authentique et très humain
- Préparation aux oraux
- S'entraîner aux épreuves en conditions réelles
- Une équipe pédagogique de haut niveau

Préparation concours Puissance Alpha

STAGES PRÉPA CONCOURS PUISSANCE ALPHA EN LIGNE

- Abordez avec sérénité les concours
- Une équipe dédiée à l'écoute de chacun,
- Des méthodes et stratégies exclusives pour les étudiants

Stage en ligne prépa concours Puissance Alpha