ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

L'usage de la calculatrice ou de tout appareil électronique est **interdit.**

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.
Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).
Toute réponse exacte rapporte un point.
Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.
L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.
Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

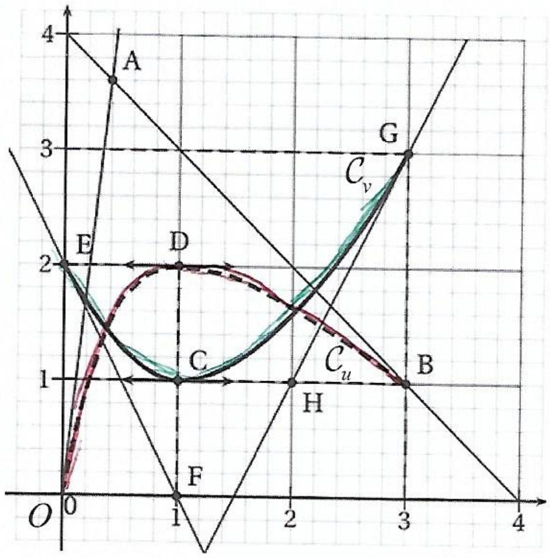
L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

Exercice n°1

Lecture graphique.

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(0,4;3,6)$, $B(3;1)$, $C(1;1)$, $D(1;2)$, $E(0;2)$, $F(1;0)$, $G(3;3)$ et $H(2;1)$.

Soit u et v deux fonctions définies sur l'intervalle $[0;3]$ de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ tracées ci-contre.



On donne les informations suivantes :

- La droite (OA) est tangente à $\mathcal{C}_u$ à l'origine du repère.
- La droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_u$ au point B.
- Les droites (EF) et (GH) sont tangentes à $\mathcal{C}_v$ respectivement aux points E et G.
- $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ admettent respectivement aux points D et C une tangente horizontale.

a) $v'(3)=3$.

b) $u'(0)=9$.

c) $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(1)=-v'(1)$. -3

d) $(u\times v)'(3)=1$.

Exercice n°2

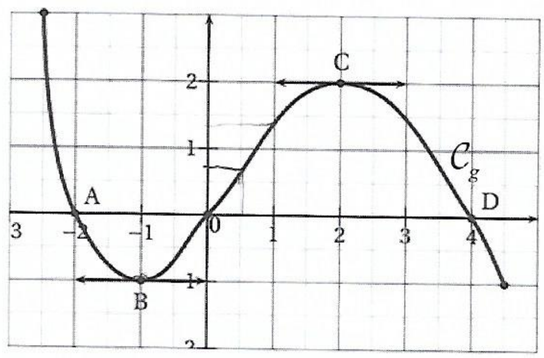
Petites questions de logique sur les fonctions.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$.

a) *$f(0,5)$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.*

b) *Si $f(0)>1$ et $f(1)<0$ alors l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0;1]$.*

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[-2,5;4,5]$ de courbe représentative $\mathcal{C}_g$ ci-contre.



c) *Si $g(x)=0$ alors $x=4$.*

d) *Si $x\in\{-1;0;2;4\}$ alors $f'(x)\times f(x)=0$.*

Exercice n°3

Suites et algorithmes.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

Pour tout entier naturel n on pose (v_n) la suite définie par $v_n = u_n^2 - 4$.

On donne les valeurs arrondies à 10^{-2} suivantes :

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{15}$
1,41	1,73	2,24	2,45	2,65	2,83	3,16	3,32	3,46	3,61	3,74	3,87

a) $u_1 = \sqrt{3}$, $u_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$ *et* $u_3 = \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

b) La suite (v_n) *est géométrique.*

c) On démontre que, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{\frac{4^n - 1}{4^{n-1}}}$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables	N est un nombre entier naturel U est un nombre réel E est un nombre réel
Traitement	**Lire** E **Affecter** à N la valeur 0 **Affecter** à U la valeur 0 **Tant que** 2 – U > E **faire** **Début Tant que** U prend la valeur $\frac{\sqrt{U^2+12}}{2}$ N prend la valeur N + 1 **Fin Tant que**
Sortie	**Afficher** N

d) Si $E = 0{,}1$ *alors* $N = 2$.

Exercice n°4

Limites et asymptotes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{x^2 - 3} = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{3} x e^x = -\infty$.

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}+1}{x+1}$ de courbe représentative C_f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) C_f *admet la droite d'équation* $y = 1$ *comme asymptote horizontale en* $+\infty$.

d) C_f *admet la droite d'équation* $x = -1$ *comme asymptote verticale.*

Exercice n°5

Calculs d'intégrales.

a) $\int_0^1 2x\mathrm{e}^{x^2}dx = \frac{\mathrm{e}^2}{2}$.

b) $\int_1^2 \left(2 - \frac{3}{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}$.

c) $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)$.

d) $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\ln(x)dx = \frac{3}{\mathrm{e}}$.

Exercice n°6

Étude de deux fonctions.

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = ln(2x)$ et $g(x) = ln(x^2 - 1)$ de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

a) $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

b) $g'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

c) *La tangente à* $\mathcal{C}_g$ *en* $x = \sqrt{2}$ *a pour équation* $y = 2\sqrt{2}x - 4$.

d) *Si* $x \in \left]1; 1+\sqrt{2}\right]$, *la courbe* $\mathcal{C}_g$ *est située au dessus de* $\mathcal{C}_f$.

Exercice n°7

Étude d'une fonction exponentielle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 2x}$.

a) $f(1) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c) $f'(x) = f(x)$.

d) *L'équation* $f(x) = \frac{1}{3}$ *admet deux solutions dans* $\mathbb{R}$.

Exercice n°8

Notions de base sur les complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Le point A a pour affixe $z_A = 1+i$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O passant par le point A.

Soit B un point de $\mathcal{C}$ d'affixe réelle z_B positive.

On définit le point E tel que le quadrilatère OBEA soit un losange.

a) $z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) *L'affixe du point B est* $z_B = \dfrac{3}{2}$.

c) *L'affixe du point E est* $z_E = \left(1+\sqrt{2}\right)+i$.

d) $OE = 2\sqrt{2}$.

Exercice n°9

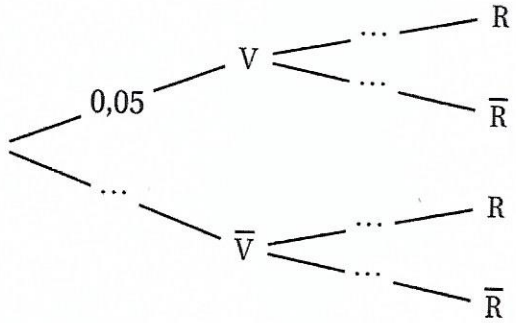
Petit exercice de probabilité.

Mon vélo est sujet à de trop fréquentes crevaisons.

Une fois sur dix, quand je prends mon vélo au moins l'une des deux roues est crevée ; la probabilité que la roue avant soit crevée vaut $0,05$ et les crevaisons à la roue avant et à la roue arrière sont indépendantes.

Je vais chercher mon vélo un jour quelconque, on note :

- V l'événement « la roue avant est crevée ».
- R l'événement « la roue arrière est crevée ».



a) $P(V\cup R)=0,1$ *et* $P(V\cap R)=0,05\times P(R)$.

b) *J'ai constaté que la roue arrière était crevée ; la probabilité que la roue avant le soit également vaut* $0,05$.

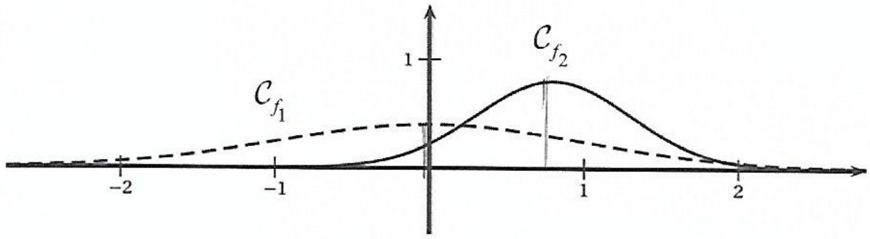
c) *La roue avant et la roue arrière ont la même probabilité d'être crevées.*

d) *Il y a une chance sur 380 pour que les deux roues soient crevées.*

Exercice n°10

Probabilités continues.

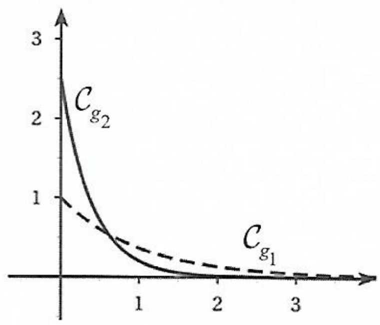
Soit μ_1 et μ_2 deux nombres réels, σ_1 et σ_2 deux nombres réels positifs.
Sur le graphique ci-dessous ont été représentées $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ respectivement les courbes représentatives des fonctions densité f_1 et f_2 de deux lois normales $\mathcal{N}_1\left(\mu_1;\sigma_1^2\right)$ et $\mathcal{N}_2\left(\mu_2;\sigma_2^2\right)$.



($\mathcal{C}_{f_1}$ en pointillés et $\mathcal{C}_{f_2}$ en trait plein).

a) $\mu_1 < \mu_2$ *et* $\sigma_1 < \sigma_2$.

Soit λ_1 et λ_2 deux nombres réels strictement positifs.
Sur le graphique ci-dessous ont été représentées $\mathcal{C}_{g_1}$ et $\mathcal{C}_{g_2}$ respectivement les courbes représentatives des fonctions densité g_1 et g_2 de deux lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.



($\mathcal{C}_{g_1}$ en pointillés et $\mathcal{C}_{g_2}$ en trait plein).

b) $\lambda_1 < \lambda_2$.

Dans une région agricole, le rendement des parcelles de blé peut être assimilé à une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 8 (en quintaux par hectare.)

On choisit une parcelle au hasard et on note R son rendement.

c) La variable aléatoire $Z = \dfrac{R-100}{8^2}$ *suit la loi normale centrée réduite.*

d) La probabilité que la parcelle ait un rendement inférieur à 116 quintaux par hectare est égale à 0,9.

Exercice n°11

Notions de base dans l'espace.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère des deux plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $(P): x-y=0$ et $(Q): y+2z-3=0$.

Ces plans se coupent selon une droite Δ et on pose K le point de coordonnées $K(1;0;2)$.

a) (P) *et* (Q) *sont deux plans orthogonaux.*

b) Le vecteur $\vec{u}(2;2;-1)$ *est un vecteur directeur de la droite* Δ.

c) $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=\dfrac{3-t}{2} \end{cases}$ *avec* $t\in\mathbb{R}$ *est une représentation paramétrique de la droite* Δ.

d) Le plan (R) *d'équation cartésienne* $2x+2y-z=0$ *est parallèle à* Δ *et contient la droite* (OK).

Exercice n°12

Utilisation des complexes en géométrie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit (E) l'équation $z^2-6z+12=0$.

a) (E) *admet deux solutions complexes* z_1 *et* z_2.

On pose z_1 la solution ayant une partie imaginaire positive.

b) $4-z_1=2e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

Soit A le point d'affixe $z_A=4$ et M_1, M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

c) $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_1}\right)=\dfrac{\pi}{6}(mod\ 2\pi)$.

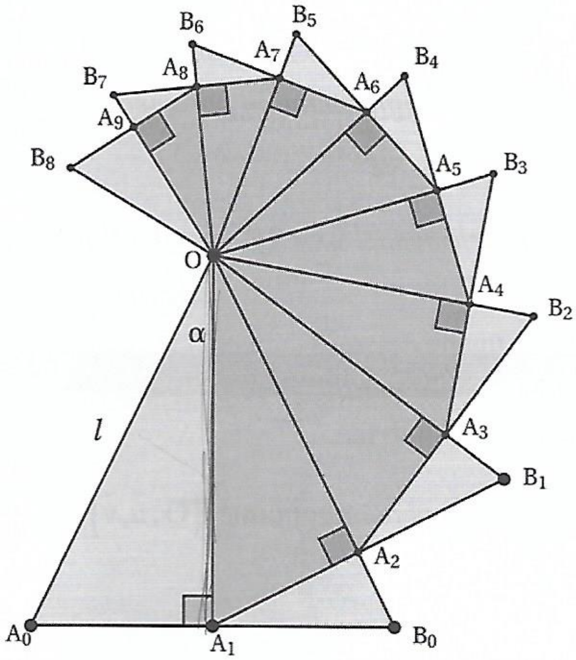
d) Le point M_1 *est situé sur le cercle de diamètre* $[OA]$.

Exercice n°13

Un peu de trigonométrie dans l'escargot.

Dans le triangle OA_0B_0, isocèle en O, A_1 est le milieu du segment $[A_0;B_0]$.
On note B_1 le symétrique de A_1 par rapport à la droite (OB_0) et A_2 le milieu du segment $[A_1;B_1]$.
En réitérant le processus on obtient, pour tout entier naturel n, une suite de triangles isocèles OA_nB_n (cf figure ci-dessous).

On pose $\alpha = \widehat{A_0OA_1}$ et $l = OA_0$



« Il y a loin de la route aux escargots »
Paul Eluard – Proverbes.

a) Pour tout entier naturel n *on a* $OA_{n+1} = \sin\alpha \times OA_n$ *et* $A_nA_{n+1} = \cos\alpha \times OA_n$.

b) Pour tout entier naturel n *on a* $OA_n = l \times (\cos\alpha)^n$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, la suite (L_n) définie par $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

c) $L_n = l \times \sin\alpha \times \dfrac{1-(\cos\alpha)^{n+1}}{1-\cos\alpha}$.

On rappelle que, pour tout réel x, on a $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ et $\sin(2x) = 2\times\sin x \times \cos x$.

d) $L_n = l \times \dfrac{1-(\cos\alpha)^n}{\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

Exercice n°14

Fonction dépendant d'un paramètre.

Pour tout nombre réel k strictement positif, on définit la fonction f_k par $f_k(x)=(x+k)\mathrm{e}^{-x}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_k$.

Par exemple si $k=7$, la fonction f_7 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_7(x)=(x+7)\mathrm{e}^{-x}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_7$.

a) *$\mathcal{C}_k$ coupe les axes du repère aux points de coordonnées $(k;0)$ et $(0;k)$.*

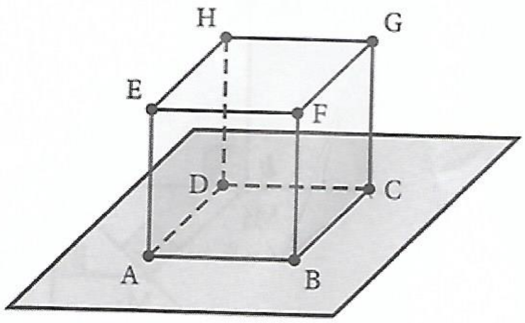
b) *Si $k=3$ alors la fonction f_3 admet e^2 comme minimum sur $\mathbb{R}$.*

c) *La fonction F_k définie par $F_k(x)=(-x-1-k)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f_k.*

d) *L'aire de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_3$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est égale à $4-5\mathrm{e}^{-1}$.*

Exercice n°15

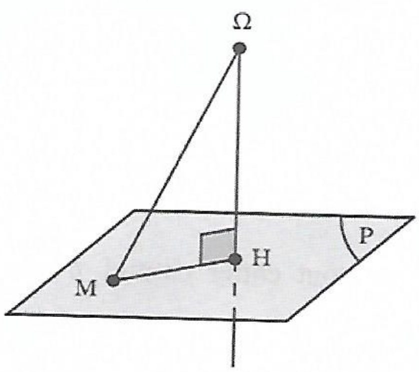
Notions d'espace dans un cube.



ABCDEFGH est un cube de côté 1 et $\left(\mathrm{A};\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

a) *Le volume du tétraèdre BCDG est égal à $\frac{1}{6}$.*

b) *L'aire du triangle BDG est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$.*



Définition : On appelle **distance du point Ω au plan** (P) la plus petite distance ΩM avec M un point du plan (P), elle représente la distance ΩH avec H le projeté orthogonal du point Ω dans le plan (P).

c) *La distance du point C au plan (BDG) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.*

d) *Une équation cartésienne du plan (BDG) est $x+y-z-1=0$.*

Exercice n°16

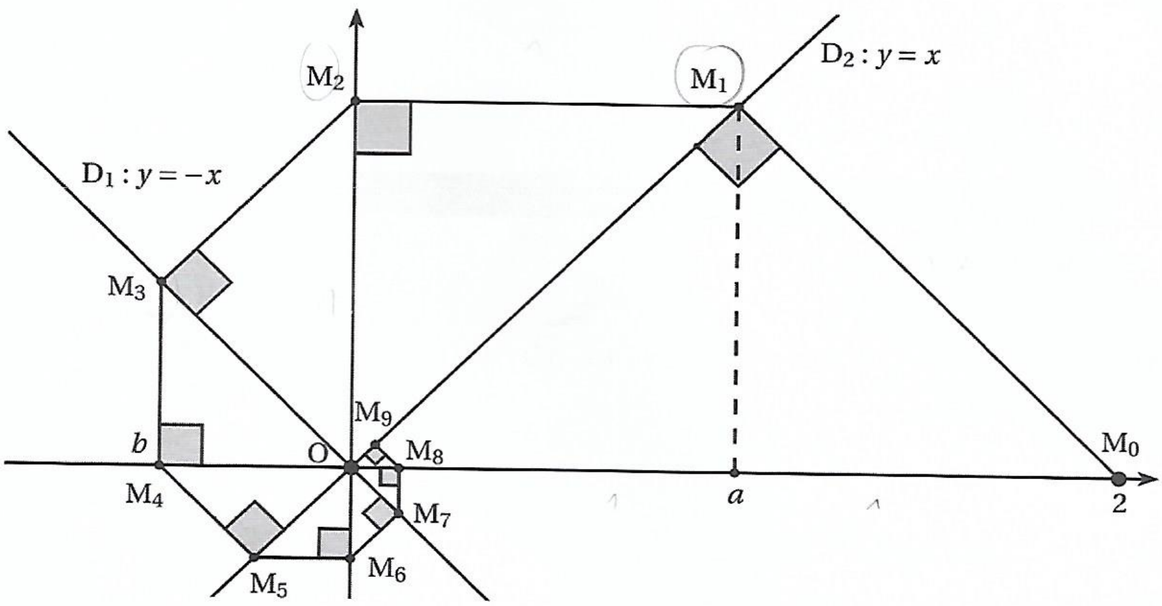
Étude d'une spirale.

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

D_1 et D_2 sont les droites d'équations $D_1 : y=-x$, $D_2 : y=x$ et M_0 représente le point de coordonnées $(2;0)$.

On construit M_1 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite D_2, M_2 le projeté orthogonal de M_1 sur l'axe des ordonnées, M_3 le projeté orthogonal de M_2 sur la droite D_1 et M_4 le projeté orthogonal de M_3 sur l'axe des abscisses.

On réitère le même procédé afin de définir, pour tout entier naturel n, la suite de points (M_n) représentée ci-dessous.



On note a l'abscisse du point M_1 et b l'abscisse du point M_4 avec a et b deux nombres réels.

a) $a=1$ *et* $M_1M_2=1$.

b) $M_2M_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on définit les suites (l_n) et (S_n) à l'aide des relations $l_n = M_nM_{n+1}$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n} l_k$.

c) $l_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times l_n$.

d) $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2\sqrt{2}+1$.

STAGES PRÉPA CONCOURS PUISSANCE ALPHA

LA MEILLEURE PRÉPA PUISSANCE ALPHA

- Un suivi authentique et très humain
- Préparation aux oraux
- S'entraîner aux épreuves en conditions réelles
- Une équipe pédagogique de haut niveau

Préparation concours Puissance Alpha

STAGES PRÉPA CONCOURS PUISSANCE ALPHA EN LIGNE

- Abordez avec sérénité les concours
- Une équipe dédiée à l'écoute de chacun,
- Des méthodes et stratégies exclusives pour les étudiants

Stage en ligne prépa concours Puissance Alpha

https://groupe-reussite.fr/stages/toutes-matieres/prepa-concours-puissance-alpha/france/toutes-periodes/