Présentation et méthodologie de l'épreuve de Mathématiques

- 2h.
- 16 exercices proposés ▸ 12 exercices à traiter au choix.
- Chaque exercice comporte 4 propositions. Chaque exercice est indépendant des autres exercices proposés.
- Les exercices proposés se présentent sous la forme de QCM de type Vrai ou Faux.

Présentation

Cette épreuve a pour but d'évaluer votre capacité à analyser un problème donné, et à sélectionner les outils calculatoires et/ou graphiques adéquats pour le résoudre. La connaissance de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse seront donc de mise pour aborder cette épreuve.

Principe et objectifs de l'épreuve

- Cette épreuve a pour but d'évaluer l'étendue de vos connaissances dans le domaine des mathématiques, et votre capacité à mener des études analytiques, algébriques et géométriques.
- Les 16 exercices proposés couvrent l'ensemble du programme de Terminale S, de façon à ce que chaque élève puisse sélectionner des exercices dont le programme a déjà été abordé au sein de son lycée.

Evaluation de l'épreuve

- L'évaluation est basée sur un bonus/malus : une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse retire 0,5 point, et l'absence de réponse équivaut à 0 point.
- Pour un même exercice, si les 4 réponses de l'élève sont correctes, alors il sera attribué automatiquement 1 point supplémentaire.

Épreuve de Mathématiques (sujet 2018)

Exercice n°1

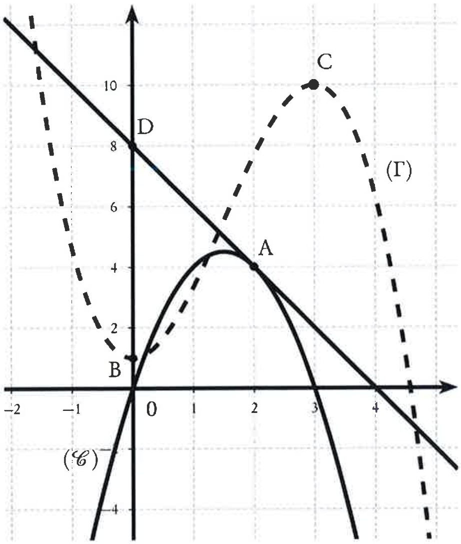
Un peu de lecture graphique.

Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points A(2;4), B(0;1), C(3;10), D(0;8).

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée par la courbe ($\mathscr{C}$) et F une primitive de f représentée par la courbe en pointillée (Γ).

A est un point de la courbe ($\mathscr{C}$), B et C sont deux points de la courbe (Γ).

La droite (AD) représente la tangente à ($\mathscr{C}$) au point A.



a) *La fonction f ' est positive sur l'intervalle* $[0;3]$.

b) $f'(2)=-3$.

c) *Le coefficient directeur de la tangente à* (Γ) *au point d'abscisse* $x=2$ *est égal à 4.*

d) $\int_{?}^{3} f(x)dx=9$.

Exercice n°2

Quelques questions de logique.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$ et f , g , h trois fonctions définies sur un même intervalle $I=[a;b]$.

a) *Si, pour tout nombre réel x de l'intervalle I,* $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ *et si les fonctions f et h admettent toutes les deux une limite finie lorsque x tend vers a, alors la fonction g admet elle aussi une limite finie lorsque x tend vers a.*

b) *Si, pour tout nombre réel x de l'intervalle I,* $f(x)<g(x)$ *et si il existe deux nombres réels L et L' tels que* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L'$ *alors* $L\leq L'$.

c) *Si la fonction f est continue en x = a, alors la fonction f est dérivable en x = a.*

d) *La réciproque du c) est fausse.*

Exercice n°3

Un peu de géométrie avec le nombre d'or :

Soit a un nombre réel strictement positif. Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on pose B le point de coordonnées $(a;0)$, C le point de coordonnées $(a;a)$ et I le milieu du segment [OB].

On construit le quatrième sommet D du carré OBCD, M le point de la demi-droite [OB) tel que IM=IC et N le quatrième sommet du rectangle OMND .

On pose Φ l'abscisse du point M.

On appelle **nombre d'or** φ, l'unique solution positive de l'équation du second degré $x^2-x-1=0$.

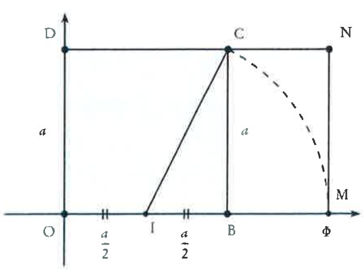
Un rectangle est dit d'or si le rapport entre la longueur L et la largeur l est égal au nombre d'or c'est-à-dire si $\dfrac{L}{l}=\varphi$.

a) *Si a=1 alors* $\Phi=\varphi$.

b) *Si a=1 alors* $\Phi=1-\dfrac{1}{\Phi}$.

c) *OMND est un rectangle d'or.*

d) $\cos\left(\widehat{BIC}\right)=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.



Exercice n°4

Un peu de lecture graphique.

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2-2$ de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ et b_0 le nombre réel 3.

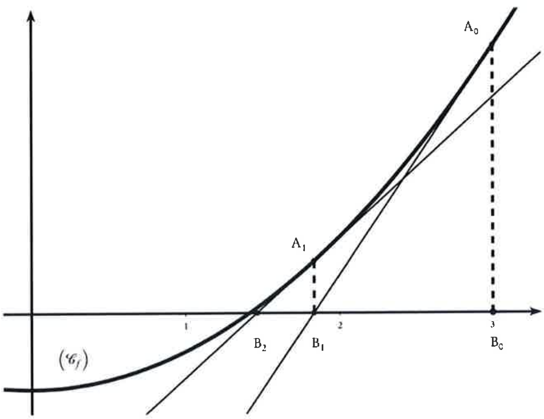
On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par $v_{n+1}=\dfrac{v_n^{\,2}+2}{2v_n}$ et $v_0=b_0=3$.

On pose B_0 le point de coordonnées $(b_0\,;\,0)$ et A_0 le point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse b_0.

La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point A_0 coupe l'axe des abscisses au point B_1 de coordonnées $(b_1\,;\,0)$.

A_1 est le point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse b_1 et B_2 le point d'intersection de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point A_1 avec l'axe des abscisses.

On recommence le même raisonnement et on pose, pour tout entier naturel n, b_n l'abscisse du point B_n.



a) *Pour tout nombre réel α, la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse α, a pour équation* $y=2\alpha x+\alpha^2-2$.

b) $b_1=\dfrac{11}{6}$.

c) *Pour tout entier naturel n,* $b_{n+1}=b_n^{\,2}-2$.

d) *Soit N un entier naturel non nul. Les deux algorithmes suivants permettent de calculer le N^{eme} terme de la suite (v_n) .*

Variables	**K est un nombre entier** **V est un nombre réel** **N est un nombre entier**
Initialisation	$V \leftarrow 3$
Traitement	**Lire N** **Pour** K **variant de** 2 **à** $N+1$ **Début du Pour** $V \leftarrow \dfrac{V^2+2}{2V}$ **Fin du Pour**
Sortie	**Afficher V**

Variables	**K est un nombre entier** **V est un nombre réel** **N est un nombre entier**
Initialisation	$V \leftarrow 3$ $K \leftarrow 1$
Traitement	**Lire N** **Tant que** $K < N+1$ **faire** **Début du Tant que** $V \leftarrow \dfrac{V^2+2}{2V}$ $K \leftarrow K+1$ **Fin du Tant que**
Sortie	**Afficher V**

Exercice n°5

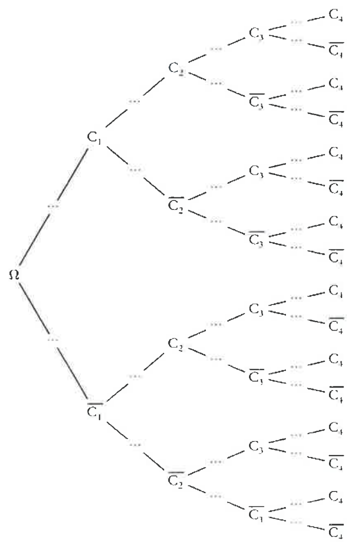
Probabilités conditionnelles.

A l'exercice de probabilité du concours Puissance Alpha de l'année dernière, 4 affirmations a), b), c) et d) étaient proposées.

La probabilité que l'élève réponde correctement à la première affirmation était de 0,8.

Si l'élève répondait correctement à une affirmation il avait 9 chances sur 10 de répondre correctement à la suivante. En revanche, si l'élève se trompait sur une affirmation, il avait 7 chances sur 10 de continuer de se tromper.

i est un entier naturel compris entre 1 et 4 et C_i est l'évènement « l'élève répond correctement à l'affirmation n° i ».



a) *La probabilité de répondre correctement aux 4 affirmations est égale à* $p = 0,8 \times 0,9^4$.

b) *La probabilité de répondre correctement à l'affirmation b) est égale à* $p' = 0,78$.

c) *La probabilité de répondre correctement à l'affirmation a) sachant qu'on a répondu correctement à l'affirmation b) est égale à* $p'' = 0,9$.

d) *La probabilité de répondre correctement aux affirmations b), c) et d) est égale à* $0,9^3$.

Exercice n°6

Calculs d'intégrales.

a) $\int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

b) $\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{3\sqrt{2}-3}{2}$.

c) $\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx = 4(e^2-1)$.

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \sqrt{3}-1$.

Exercice n°7

Calculs de limites.

a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-x+1}-x=0$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3e^x+1}{2x+5}=\frac{1}{2}$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n$.

Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

c) *La suite* (u_n) *diverge.*

d) $\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$.

Exercice n°8

Petite étude de fonction exponentielle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=e^{\frac{x-1}{x^2}}$ de courbe représentative ($\mathscr{C}_f$) et Δ la droite d'équation $y=1$.

a) *Pour tout nombre réel x appartenant à* $\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\left(\dfrac{2-x}{x^3}\right)e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

b) ($\mathscr{C}_f$) *admet la droite* Δ *comme asymptote horizontale en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

c) ($\mathscr{C}_f$) *admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.*

d) *L'équation* $f(x)=0$ *admet 2 solutions sur* $\mathbb{R}^*$.

Exercice n°9

Petite étude de fonction ln.

Soit f la fonction définie sur $I=]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$ de courbe représentative ($\mathscr{C}_f$).

a) *Pour tout nombre réel x de l'intervalle I,* $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

b) *Pour tout nombre réel x, de l'intervalle I, on a* $f'(x)=\dfrac{x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln(x))^2}$.

c) *La fonction f est strictement croissante sur I* .

d) ($\mathscr{C}_f$) *admet la droite* Δ *d'équation* $y=0$ *comme asymptote horizontale en* $+\infty$.

Exercice n°10

Petite étude de suite.

Soit f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2\ln(x)$ et Φ la fonction définie sur $J = \left[e^{-\frac{1}{8}};+\infty\right[$ par $\Phi(x) = \sqrt{1+8\ln(x)}$.

On pose (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \Phi(u_n)$.

On rappelle, dans toute la suite de l'exercice, que $\ln(2) \approx 0,7$ $\ln(3) \approx 1,1$ et $\ln(4) \approx 1,4$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b) *L'équation* $f(x) = 0$ *admet deux solutions dont l'une* x_0 *appartient à l'intervalle* $[3;4]$.

c) $x_0 = \Phi(x_0)$.

d) *Pour tout entier naturel n, on a* $u_n \geq 3$.

Exercice n°11

Notions de base sur les nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

a) $(-\sqrt{3}+i)^3 = 8i$.

b) *La forme exponentielle de* $-\sqrt{3}-i$ *est* $-2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Soit f la transformation complexe du plan qui, à tout point M d'affixe $z \neq 3i$ associe le point M' *d'affixe* $z' = \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}+3i}$.

c) *L'équation* $|z'| = 1$ *admet une unique solution dans* $\mathbb{C}$.

d) *L'équation* $z' = 2$ *admet une unique solution dans* $\mathbb{C}$.

Exercice n°12

Utilisation des nombres complexes en géométrie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A,B,C et D sont les points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}, z_B = -i\sqrt{3}, z_C = 3+2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$.

Le point E, d'affixe z_E, est le symétrique du point D par rapport au point O.

a) $z_E = -3-2i\sqrt{3}$.

b) *L'ensemble des points M du plan complexe tels que* $|z| = z$ *est une droite.*

c) *Les points A,B,C et D sont sur un même cercle de centre* Ω *d'affixe 3.*

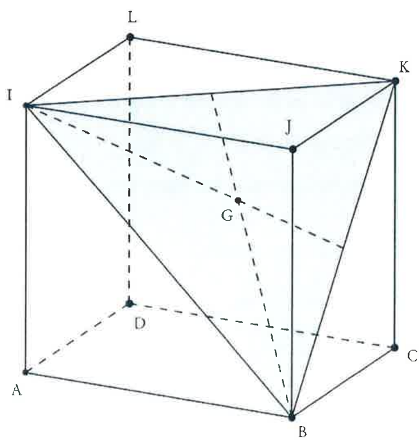
d) $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right) = \frac{\pi}{3} (\operatorname{mod} 2\pi)$.

Exercice n°13

Section dans un cube.

ABCDIJKL est un cube de côté 1 et $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

On pose G le centre de gravité du triangle BIK.



a) *Le point G a pour coordonnées* $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

b) *Les points J, G et D sont alignés.*

c) *La droite (JD) et le plan (BIK) sont perpendiculaires.*

d) *Le volume du tétraèdre IKBJ est égal à* $\frac{1}{6}$.

Exercice n°14

Petit tour d'horizon sur les probabilités continues.

Soit λ un nombre réel strictement positif.

On pose :

- α et β deux nombres réels tels que $0 < \alpha \leq \beta < 1$
- U la variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$
- X la variable aléatoire définie par la relation $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

a) *Pour tout nombre réel* $a \in]0;1[$, $P(U = a) > 0$.

b) *Pour tout nombre réel a strictement positif,* $P(X < a) = P\left(U \leq 1 - e^{-\lambda a}\right)$.

c) $P(U \leq \beta) = \beta$.

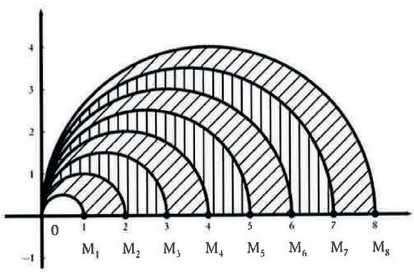
d) $P(\alpha \leq X \leq \beta) = e^{-\lambda\beta} - e^{-\lambda\alpha}$.

Exercice n°15

Petite suite de points.

Soit n un entier naturel non nul et (M_n) la suite de points de coordonnées $(n;0)$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose A_n l'aire de la partie du plan comprise entre les demi-cercles de diamètres $[OM_n]$ et $[OM_{n+1}]$ et l'axe des abscisses (cf. figure ci-contre).



a) $A_1 = 3\pi$ *et* $A_2 = 5\pi$.

b) $A_n = 2 \times \pi \times n + \pi$.

c) *La suite* $(A_n)_{n \geq 1}$ *est une suite arithmétique de raison* $r = 2\pi$.

d) *Pour tout entier naturel n non nul,* $S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{\pi}{8} \times n \times (n+2)$.

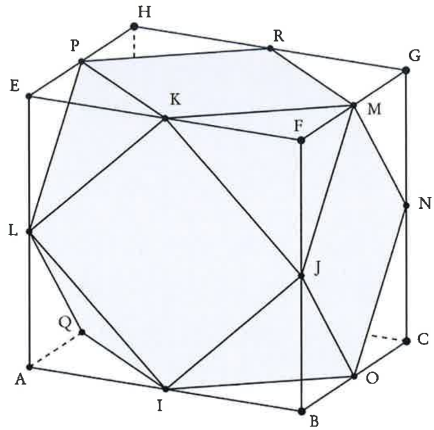
Exercice n°16

Travail autour d'un cuboctaèdre.

ABCDEFGH est un cube de côté 1 et $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

Définition :

On appelle **cuboctaèdre** le solide ayant pour sommets les milieux des arêtes d'un cube.



Dans le cube ABCDEFGH, on définit I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S et T les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [EF], [AE], [FG], [CG], [BC], [EH], [AD], [HG], [HD] et [CD].

On appelle (Γ) le cubocatèdre ainsi obtenu (cf. figure ci-dessus).

Δ est la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = 0,25-0,13t \\ z = 1,25-0,13t \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$.

a) *Le cuboctaèdre* (Γ) *se compose de 6 faces carrées, huit faces triangulaires et a un volume* $V=\dfrac{5}{6}$.

b) *Les plans (SQT) et (KMJ) sont sécants.*

c) *Les plans (JKM) et (LKP) sont sécants suivant une droite parallèle à la droite (IR).*

d) *Les plans (JKM) et (LKP) sont sécants suivant la droite* Δ .

STAGES PRÉPA CONCOURS PUISSANCE ALPHA

LA MEILLEURE PRÉPA PUISSANCE ALPHA

- Un suivi authentique et très humain
- Préparation aux oraux
- S'entraîner aux épreuves en conditions réelles
- Une équipe pédagogique de haut niveau

[Préparation concours Puissance Alpha]

STAGES PRÉPA CONCOURS PUISSANCE ALPHA EN LIGNE

- Abordez avec sérénité les concours
- Une équipe dédiée à l'écoute de chacun,
- Des méthodes et stratégies exclusives pour les étudiants

[Stage en ligne prépa concours Puissance Alpha]

https://groupe-reussite.fr/stages/toutes-matieres/prepa-concours-puissance-alpha/france/toutes-periodes/