PUISSANCE ALPHA

Concours Ingénieurs Bac+5

ANNALES

Samedi 27 avril 2024

Bac général : ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1h30

VOUS DEVEZ TRAITER **8 EXERCICES**

Vous devrez OBLIGATOIREMENT traiter :

- **Les 4 exercices** de la partie ***« Fondamentaux »***
- **ET 4 exercices parmi ceux proposés *selon votre profil de terminale***

POUR TOUS LES PROFILS

Exercices fondamentaux

☑**Faire les exercices 1 à 4**

ET

SELON VOTRE PROFIL DE TERMINALE

Traiter 4 exercices** dans la liste correspondant **à votre profil

(détaillé ci-dessous)

➔ *Profil 1* **Spécialisation Mathématiques** :
Élève ayant suivi la ***Spécialité Mathématiques***
☑**Choisir 4 exercices entre les 5 et 12**

➔ *Profil 2* **Option Mathématiques complémentaires** :
Élève ayant suivi ***l'option Mathématiques Complémentaires***
☑**Faire les exercices 13 à 16**

➔ *Profil 3* **Tronc commun** :
Élève n'ayant suivi ***NI la Spécialité Mathématiques NI l'option Mathématiques complémentaires***
☑**Choisir 4 exercices entre les 17 et 24**

Tout **exercice traité mais ne correspondant pas à votre profil NE SERA PAS COMPTABILISÉ**.
De plus, si vous traitez plus de 4 exercices de votre profil, **seuls les 4 premiers seront corrigés**.

- Un exercice comporte **4 affirmations** repérées par les lettres **a, b, c, d.**
- Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est **vraie (V) ou fausse (F).**
- ***Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée.***

- Une réponse exacte rapporte 1 point.
- Une réponse inexacte entraîne le retrait de 0.5 point.
- Une réponse annulée ou l'abstention de réponse ne rapporte ni ne retire aucun point.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

L'usage de la calculatrice ou de tout appareil électronique est interdit.

EXERCICES COMMUNS À TOUS LES CANDIDATS

Faire les exercices
1 à 4

CES EXERCICES SONT OBLIGATOIRES

Exercice n°1 : Les bases du calcul

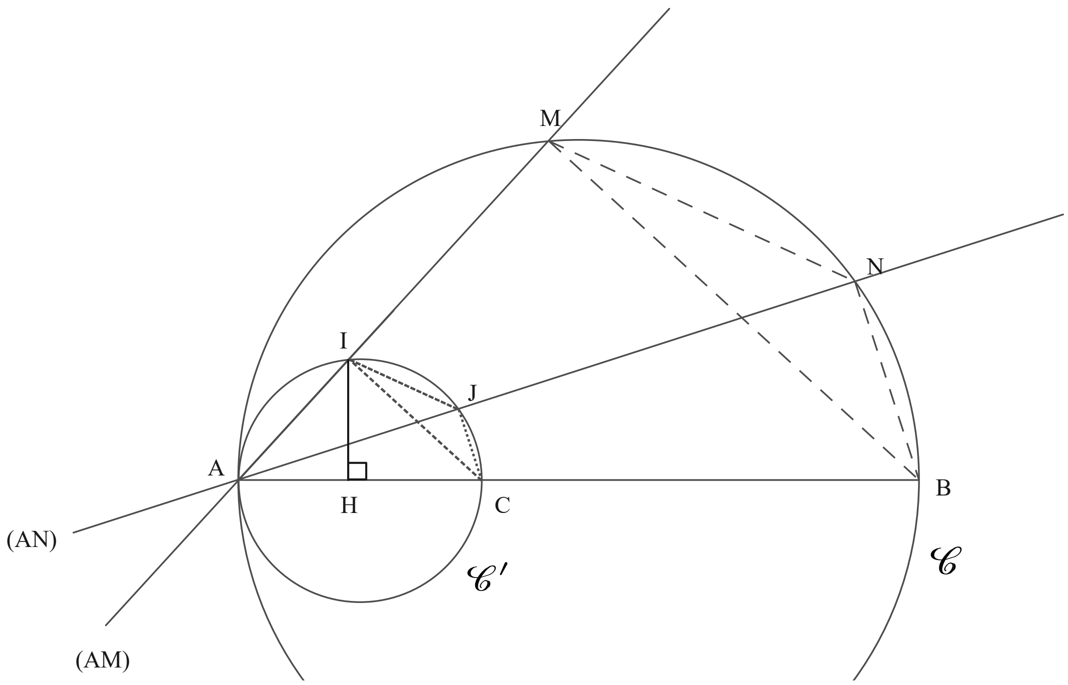
a) $2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{5}{4}$.

b) Pour tout nombre réel x*, on a* $(2+x)^2-(2-x)^2=8x$.

c) Pour tout entier naturel n*, on a* $\dfrac{4^{2n-1}\times 3^{-3n+1}}{2^{-n-5}}=24\left(\dfrac{32}{27}\right)^n$.

d) Si $x<0$ *alors* $\sqrt{x^2-x+1}-x=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}$.

Exercice n°2 : Le point en géométrie



A, C et B sont trois points distincts alignés dans cet ordre.

$\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre le segment $[AB]$, $\mathscr{C}'$ est le cercle de diamètre le segment $[AC]$ et M et N sont deux points du cercle $\mathscr{C}$ distincts des points A et B.

La droite (AM) coupe le cercle $\mathscr{C}'$ en un point I et la droite (AN) coupe le cercle $\mathscr{C}'$ en un point J.

a) *Si* $\widehat{IAC} = 45°$ *alors le triangle* AIC *est rectangle et isocèle.*

Dans la suite de l'exercice, on donne les hypothèses suivantes :

$\widehat{IAC} = 30°$, $AC = 10$, $AI = 4$, $AB = 30$ et H est le pied de la hauteur du triangle AIC issue de I.

b) $IH = 3$.

c) *L'aire du triangle* AIC *est égale à* $\mathscr{A} = 10$ *unités d'aire* .

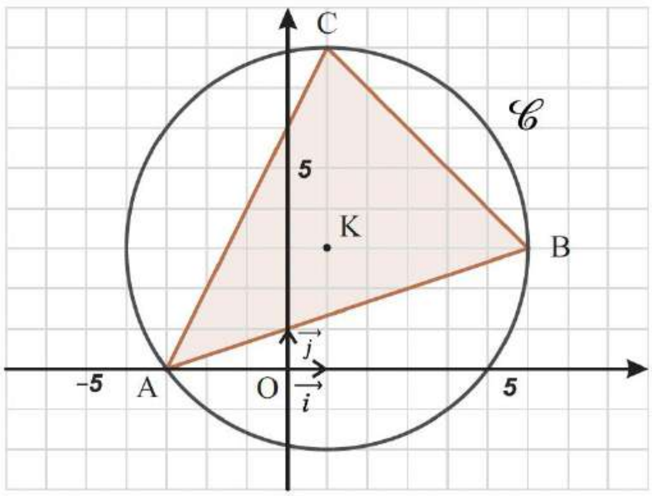
d) $MB = 24$.

Exercice n°3 : Le point sur les vecteurs

Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on définit A, B, C et K les points ayant pour coordonnées $A\,(-3 ; 0)$, $B\,(6 ; 3)$, $C\,(1 ; 8)$ et $K\,(x ; y)$ avec x et y deux nombres réels.

K est le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABC et I est le milieu du segment $[AB]$.

La parallèle (Δ) à la droite (CB) passant par K coupe l'axe des abscisses en un point E.



a) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$ *et* $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$.

b) $KA^2 = KB^2 \iff 3x + y - 6 = 0$.

c) *Les coordonnées* $(x ; y)$ *du point* K *vérifient le système :*

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

d) $5\overrightarrow{KE} - 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$.

Exercice n°4 : Algorithmique et programmation

On donne **prog1, prog2, prog3, prog4, prog5** et **prog6** les programmes suivants :

```python
from math import*

def prog1(n):
    u=3
    s=0
    for k in range(n-1):
        s=s+u
        u=2*u-1
    return s
```

```python
from math import*

def prog2(n):
    a=2
    b=3
    v=2*b-a
    k=2
    liste=[2,3]
    while k<n:
        liste.append(v)
        k=k+1
        a=b
        b=v
        v=2*b-a
    return liste
```

```python
from math import*

def prog3(n):
    a=2
    b=3
    liste=[2,3]
    for k in range(1,n-1):
        v=2*b-a
        liste.append(v)
        a=b
        b=v
    return liste
```

```python
from math import*

def prog4(A):
    n=1
    w=12
    while w>A:
        n=n+1
        w=2/5*w
    return n
```

```python
from math import*

def prog5(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        u=2*k**2-k+1
        S=S+u
    return S
```

```python
from math import*

def prog6(n):
    S=0
    for k in range(n):
        u=2*k**2+3*k+2
        S=S+u
    return S
```

a) **prog1(3)** *affiche la valeur 8.*

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, **prog2(n)** *et* **prog3(n)** *affichent les* n *premiers termes de la suite* (v_k) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par la relation de récurrence* $v_0 = 2$, $v_1 = 3$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+2} = 2v_{k+1} - v_k$.

c) **prog4(2)** *affiche la valeur 3.*

d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, **prog5(n)** *et* **prog6(n)** *calculent la somme* $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(2k^2 - k + 1\right)$.

PROFIL N°1 : exercices réservés aux élèves ayant suivi la SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES EN TERMINALE

Choisir 4 exercices
entre les exercices 5 et 12

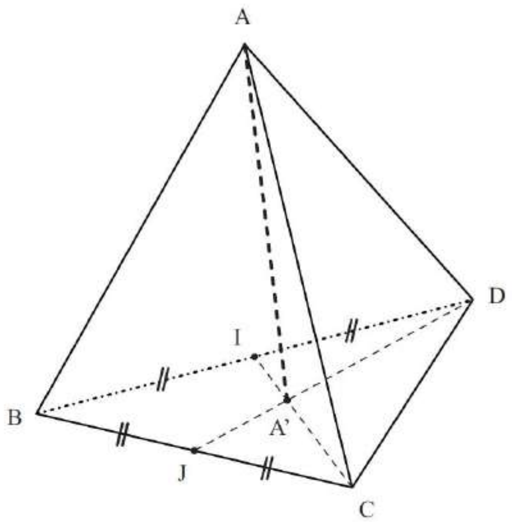
Programme de la spécialité Mathématiques de terminale

Exercice n°5 : Géométrie dans l'espace

Définition :
Dans un tétraèdre, la droite passant par un sommet et le centre de gravité de la face opposée est appelé médiane.

Au *a)* on suppose que $ABCD$ est un tétraèdre régulier avec A' le centre de gravité du triangle BCD.

I est le milieu du segment $[BD]$ et J est le milieu du segment $[BC]$.



a) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ *et la médiane* (AA') *du tétraèdre régulier* $ABCD$ *est perpendiculaire au plan* (BCD).

Dans la suite de l'exercice, on munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$.

A, B, C, D sont les points de coordonnées respectives :

$$A\,(0\,;\,0\,;\,3),\ B\left(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1\right), C\left(-\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{6}\,;\,-1\right) \text{ et } D\left(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;\,-1\right).$$

A' est le centre de gravité du triangle BCD.

b) $ABCD$ *est un tétraèdre régulier*.

c) *Le point* A' *a pour coordonnées* $A'\,(0\,;\,0\,;\,-1)$.

d) *Le plan* (BCD) *a pour équation cartésienne* $(BCD): z+1=0$.

Exercice n°6 : Limites

a) $\lim\limits_{U \to 0} \dfrac{sin(U)}{U} = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\, sin\left(\dfrac{2}{x}\right)\right) = 2$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{16x^2 - x - 1} - 4x\right) = 0$.

Soit f la fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$$

c) La droite d'équation $y = 0$ *est asymptote horizontale à* $\mathscr{C}_f$ *au voisinage de* $+\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x\right) = 0$.

Exercice n°7 : Études de fonctions

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

et g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

a) L'équation $g(x) = 0$ *admet une unique solution* $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$.

b) $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

c) $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(x e^x + 1)^2}$.

d) f *admet un minimum en* $x = \alpha$.

Exercice n°8 : Suites et probabilités

Paul décide de jouer à un jeu au casino.

On admet que :

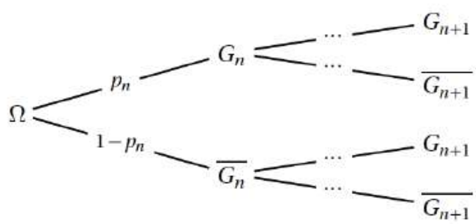
- s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$
- s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose G_n l'évènement “ Paul gagne la n-ième partie ” et on note :

- p_n la probabilité de l'évènement G_n
- $u_n = p_n - \frac{1}{4}$

Paul gagne la première partie donc $p_1 = 1$.

Avec les hypothèses précédentes, on obtient l'arbre pondéré :



a) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{5} .$$

b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmétique de raison $r = \frac{1}{5}$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

d) Si Paul joue suffisamment, il finira par avoir plus de chances de gagner que de perdre à ce jeu.

Exercice n°9 : Équations différentielles

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t représente un nombre décimal d'heures.

On admet que la fonction, qui à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : \; y' + \frac{1}{2}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$$

On pose (E') l'équation différentielle :

$$(E') : \; y' + \frac{1}{2}y = 0 .$$

a) *La fonction* $g : x \longmapsto 20x\,e^{-\frac{1}{2}x}$ *est une solution particulière de l'équation différentielle* (E).

b) *Les fonctions solutions de l'équation différentielle* (E') *sont les fonctions* f_k, *définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_k(x) = k\,e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{avec } k \text{ un nombre réel.}$$

Résultat admis :

Soit g une solution particulière de l'équation (E) définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

f est solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle (E) si et seulement si $f-g$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle (E').

Dans la suite de l'exercice, on admet que la température de la réaction chimique, au début de l'expérience, est de 10 degrés. On pose h l'unique solution de (E), définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et prenant la valeur 10 à l'instant $t = 0$.

c) *La température de la réaction chimique, après une heure d'attente, est de* $30\sqrt{e}$ *degrés.*

d) *La température maximale de la réaction chimique est de* $40\,e^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ *degrés.*

Exercice n°10 : Le point sur les suites

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 1{,}5u_{n+1} - 0{,}5u_n$.
(v_n) est la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) $v_0 = 1$ *et* $v_1 = 0{,}5$.

b) *La suite* (v_n) *est géométrique de raison* $q = 1{,}5$.

c) *La suite* (v_n) *converge vers* $L = 0$.

On donne le programme suivant :

```
from math import*

def prog(n):
    u_n=1
    u_n1=2
    u_n2=1.5*u_n1-0.5*u_n
    v_n=u_n1-u_n
    k=0
    while k<=n:
            k=k+1
            u_n=u_n1
            u_n1=u_n2
            u_n2=1.5*u_n1-0.5*u_n
            v_n=u_n1-u_n
    return v_n
```

d) prog(n) *affiche la valeur de* v_n.

Programme de l'option Mathématiques Expertes en terminale

Exercice n°11 : Le point sur les matrices

Soit A, P et M les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix} \text{ et } M=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&1&0\\-4&0&-1\end{pmatrix}$$

a) $A\cdot P\cdot M=\begin{pmatrix}5&-5&0\\2&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

b) $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-1\\-2&1&3\end{pmatrix}$

c) $P\cdot M=-A\cdot P$.

d) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n&n(n+1)\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice n°12 : Le point sur les nombres complexes

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z)=z^4+2\sqrt{3}z^3+8z^2+2\sqrt{3}z+7$$

a) $P(z)=\left(z^2+1\right)\left(z^2+2\sqrt{3}z+7\right)$.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

$$z_A=\mathrm{i},\ z_B=-\mathrm{i},\ z_C=-\sqrt{3} \text{ et } z_D=-\sqrt{3}-2\mathrm{i}\ .$$

b) z_A, z_B, z_C *et* z_D *sont 4 racines du polynôme* P.

c) A, B, C *et* D *appartiennent au cercle de diamètre le segment* $[CD]$.

d) $CA=CB$ *et* $\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

PROFIL N°2 : exercices réservés aux élèves ayant suivi L'OPTION MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES EN TERMINALE

Faire les exercices
13 à 16

Exercice n°13 : Étude de fonctions logarithme Népérien

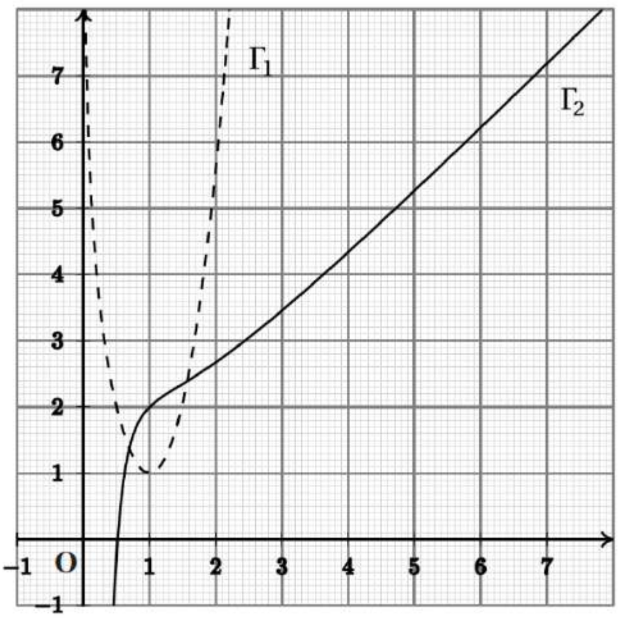
f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g : x \mapsto x^3 - x - 2\ln(x) + 1$$

On a représenté, ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions f et g :



a) Γ_1 *est la courbe représentative de la fonction* f .

b) $f\left(\sqrt{e}\right) = 2\left(\dfrac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right) + \dfrac{e^{-1}}{2}$.

c) Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{(x-1)\left(3x^2+3x+2\right)}{x}$ *et* $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

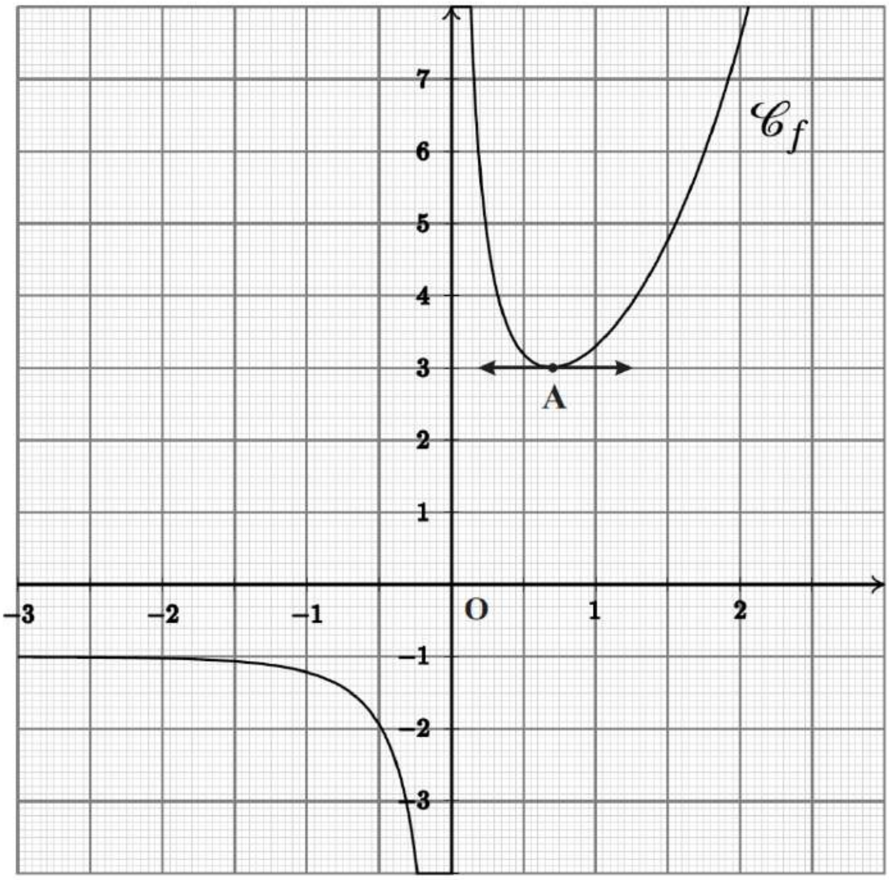
d) La courbe représentative de la fonction g *admet une unique tangente parallèle à la droite* $\Delta : y = -x + 1$.

Exercice n°14 : Étude d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, représentée ci-dessous et définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$f(x)=\frac{e^{3x}+1}{e^{2x}-1}$$

$\mathscr{C}_f$ admet, au point A d'abscisse $x_A>0$, une tangente horizontale.



a) Pour tout $x\neq 0$ *on a* $f'(x)=\dfrac{e^{5x}+3e^{3x}-2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$.

b) Pour tout $x\neq 0$ *on a* $f'(x)=\dfrac{(e^{x}+1)^2\left(e^{3x}-2e^{2x}\right)}{(e^{x}+1)^2(e^{x}-1)^2}=\dfrac{e^{3x}-2e^{2x}}{(e^{x}-1)^2}$.

c) $x_A=\ln(2)$.

d) $\mathscr{C}_f$ *coupe la droite* $\Delta : y=-1$ *en un unique point B d'abscisse* $x_B\leqslant -3$.

Exercice n°15 : Probabilités et variables aléatoires

Chaque matin, la boulangerie ouvre ses portes à 9h. On estime qu'il y a au maximum 2 clients qui se présentent les 5 premières minutes suivant l'ouverture.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de clients se présentant les 5 premières minutes après l'ouverture de la boulangerie.

On a $X \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$ et on donne la loi de probabilité de X :

i	0	1	2
$P(X=i)$	$0,1$	$0,5$	$0,4$

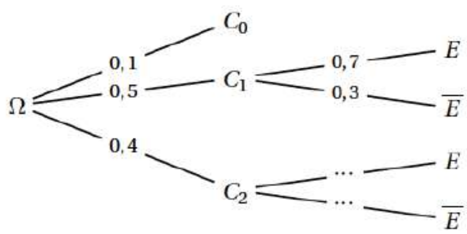
Dans toute la suite de l'exercice, on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe lors des 5 premières minutes suivant l'ouverture de la boulangerie et on donne les informations suivantes :

- un client achète toujours soit une baguette, soit une viennoiserie **mais jamais une baguette et une viennoiserie en même temps**
- un client achète une baguette avec une probabilité de $0,7$ et une viennoiserie avec une probabilité de $0,3$
- le choix d'un client est indépendant de celui des autres clients

On pose les évènements suivants :

- C_0 : " aucun client ne se présente les 5 premières minutes "
- C_1 : " un unique client se présente les 5 premières minutes "
- C_2 : " deux clients se présentent les 5 premières minutes "
- E : " la boulangerie vend une unique baguette les 5 premières minutes "

On donne l'arbre pondéré ci-contre :



a) *En moyenne, on a 1,5 clients les 5 premières minutes.*

b) *Deux clients se présentent les 5 premières minutes. La probabilité de vendre une unique baguette est égale à* $0,42$.

c) *La probabilité de vendre une unique baguette les 5 premières minutes est égale à* $0,7$.

On admet qu'entre 9h et 9h05, la boulangerie a vendu une unique baguette.

d) *La probabilité que deux clients soient passés entre 9h et 9h05 est égale à* $\dfrac{12}{37}$.

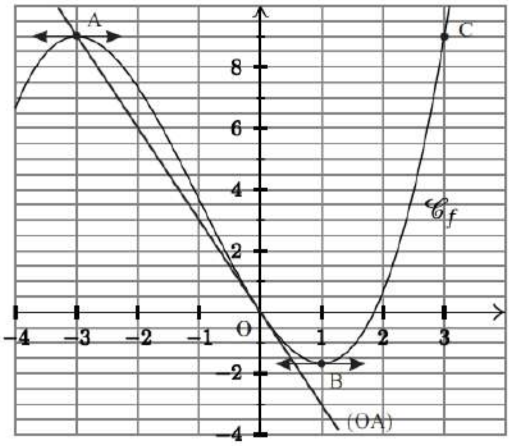
Exercice n°16 : Le point sur la dérivation

a, b, c et d sont quatre nombres réels.
f est la fonction polynôme, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

On admet que :

- $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine O du repère ;
- $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(-3\,;\,9)$, $B(1\,;\,y_B)$ avec $y_B \in \mathbb{R}$ et $C(3\,;\,9)$;
- $\mathscr{C}_f$ admet aux points A et B une tangente horizontale ;
- $\mathscr{C}_f$ admet la droite (OA) pour tangente au point O.



a) $f'(0) = f(0)$ *et* $f'(-3) = f'(1)$.

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont les trois courbes représentées sur les schémas n°1, n°2 et n°3 ci-dessous :

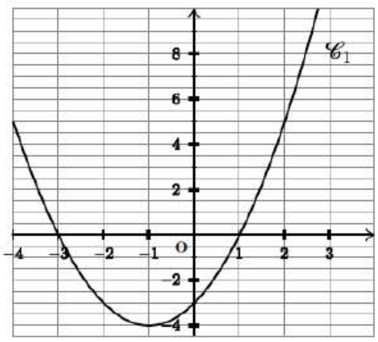


Schéma n°1

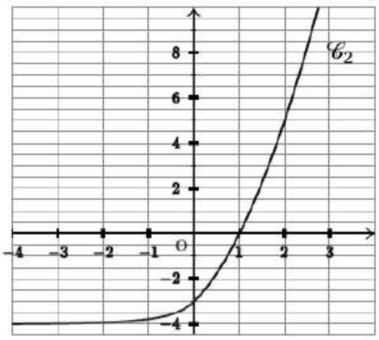


Schéma n°2

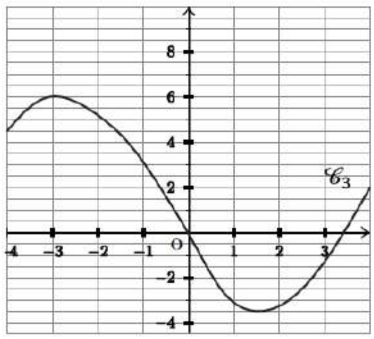


Schéma n°3

On admet que l'une des trois courbes est la représentation graphique de la fonction f'.

b) La courbe représentative de la fonction f' est la courbe $\mathscr{C}_2$ ou $\mathscr{C}_3$.

c) $d = 0$ *et* $c = -3$.

d) $y_B = -\dfrac{5}{3}$.

PROFIL N°3 : exercices réservés aux élèves n'ayant suivi NI la spécialité mathématiques NI l'option mathématiques complémentaires en Terminale

Choisir 4 exercices
entre les exercices 17 et 24

Programme de l'enseignement de mathématiques intégré à l'enseignement scientifique de première

Exercice n°17 : Phénomènes aléatoires

Un club mixte compte 50 adhérents licenciés **H**ommes ou **F**emmes .

Parmi eux, certains pratiquent du **T**ennis, du **J**udo ou vont à la **P**iscine.

On note :

- **H** si l'adhérent est un **H**omme
- **F** si l'adhérente est une **F**emme
- **T** si l'adhérent pratique du **T**ennis
- **J** si l'adhérent pratique du **J**udo
- **P** si l'adhérent va à la **P**iscine

Par exemple, $(\boldsymbol{H} ; \boldsymbol{P})$ représente un adhérent **Homme** pratiquant la **Piscine** .

On obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
1	(H;P)	(F;T)	(F;T)	(F;J)	(H;J)
2	(H;P)	(F;P)	(H;P)	(F;P)	(H;T)
3	(H;J)	(H;T)	(H;T)	(H;P)	(H;J)
4	(H;P)	(H;P)	(F;T)	(F;J)	(F;T)
5	(H;T)	(H;T)	(H;P)	(H;T)	(F;T)
6	(F;J)	(H;J)	(H;T)	(F;T)	(H;P)
7	(F;P)	(H;J)	(F;J)	(F;T)	(H;T)
8	(H;J)	(H;J)	(F;P)	(F;P)	(H;T)
9	(H;P)	(H;P)	(H;P)	(F;T)	(H;J)
10	(F;J)	(F;T)	(F;J)	(H;J)	(H;P)

a) 10% *des Femmes vont à la Piscine.*

b) 40% *des adhérents pratiquant du Judo sont des Femmes.*

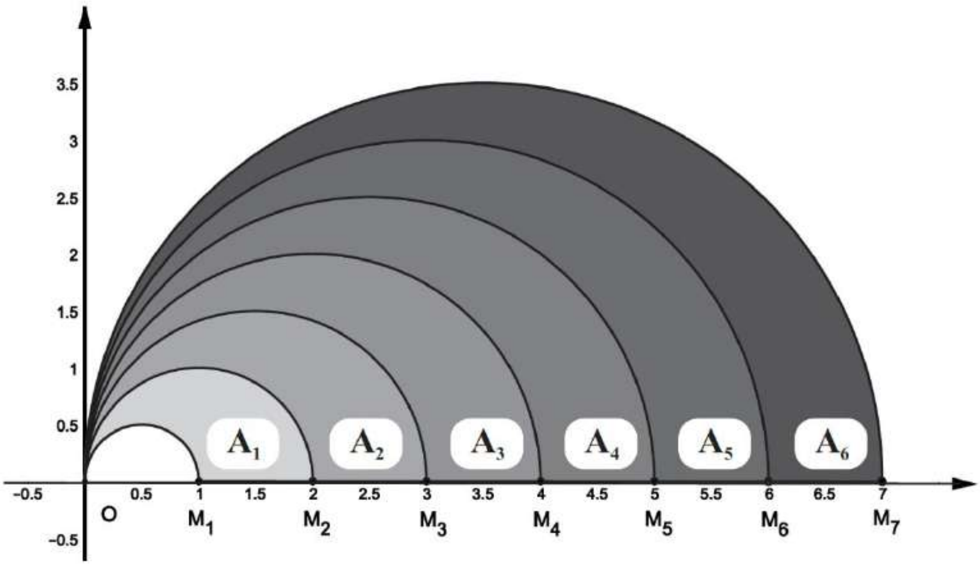
c) La fréquence marginale des adhérents pratiquant le Tennis est de $0,36$.

d) La probabilité de faire du Judo sachant que l'adhérent est un Homme est égale à la probabilité de faire du Judo sachant que l'adhérente est une Femme.

Exercice n°18 : Suite et géométrie

Soit n un entier naturel non nul et (M_n) la suite de points de coordonnées $(n\ ;\ 0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose A_n l'aire de la partie du plan comprise entre les demi-cercles de diamètres $[OM_n]$, $[OM_{n+1}]$ et l'axe des abscisses.



a) $A_2 = \dfrac{5\pi}{8}$.

b) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = 2 \times \pi \times n$.

c) *La suite* (A_n) *est une suite arithmétique de raison* $\dfrac{1}{4}$.

d) $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 6\pi$.

Exercice n°19 : Croissance exponentielle

Pour évaluer l'isolation thermique d'une pièce, on mesure la quantité de chaleur perdue, en °C, en fonction du temps t, exprimé en nombre décimal d'heures, à partir de l'arrêt du chauffage à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{875}{8} \times 0{,}4^t$$

a) f *est croissante.*

b) $4h$ *après l'arrêt du chauffage, nous aurons perdu* $2{,}8\,°C$.

On place un capital de 100€ à intérêts composés au taux annuel de 2%.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose C_n le capital, en euros, obtenu après n années.

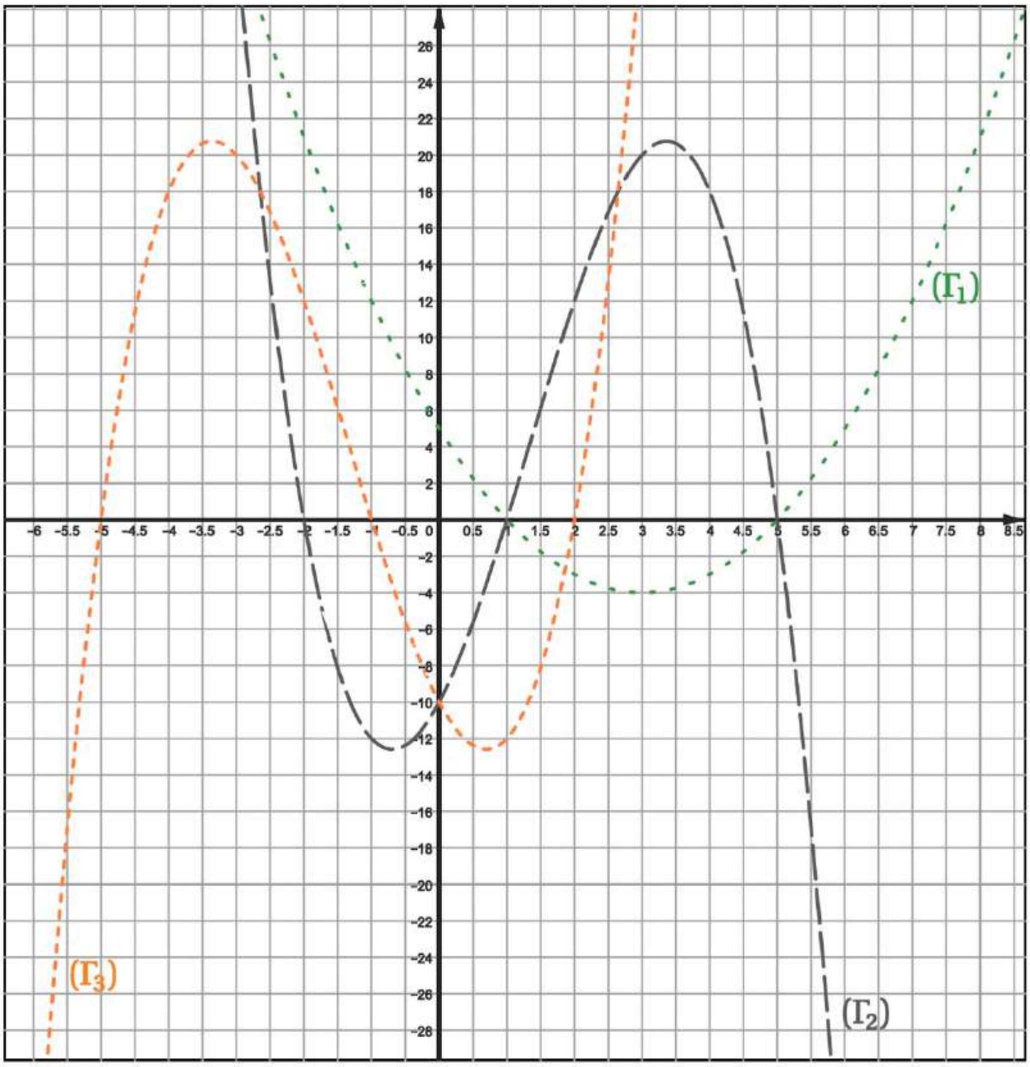
c) $C_3 \approx 106$€ .

d) *La suite* (C_n) *est une suite arithmétique.*

Exercice n°20 : Variation instantanée - Variation globale

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+10x+20$.

Sur la figure ci-dessous, on a représenté (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_3) les courbes représentatives respectives de trois fonctions g_1, g_2 et g_3 .



Aide :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la dérivée de la fonction $x\longmapsto x^4$ est la fonction $x\longmapsto 4\times x^3$.

a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x-1)(x+2)(x-5)=g_2(x)$.

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=g_1(x)$ *ou* $f'(x)=g_3(x)$.

c) La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ *au point d'abscisse* $x=-1$ *est parallèle à la droite* Δ *d'équation* $y=12x-1$.

d) $(\mathscr{C}_f)$ *admet, au point d'abscisse* $x=2$, *une tangente ayant pour équation* $y=-12x+\frac{130}{3}$.

Exercice n°21 : Équations du second degré

m est un nombre réel différent de $\frac{1}{2}$.

P est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = (1-2m)x^2 - 4mx + 1$$

(E) est l'équation d'inconnue x et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E) : (1-2m)x^2 - 4mx + 1 = 0$$

Résultats admis :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \approx -0,8 \quad \text{et} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0,3$$

a) (E) *admet une unique solution si et seulement si* $m = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

b) La fonction P *est croissante sur* $\mathbb{R}$.

c) Si $m < \frac{1}{2}$ *alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant \frac{-16m^2 - 8m + 4}{4 - 8m}$.

d) Si $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < m < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ *alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$.

Exercice n°22 : Le point sur les suites

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = 1 + (-1)^n \frac{5}{2^{n-1}}$.

a) $\frac{u_{n+1}-1}{u_n - 1}$ *est indépendant de* n.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$.

b) La suite (v_n) *est croissante.*

Soit (s_n) la suite définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, par $s_{n+1} = \frac{2s_n + 2}{s_n + 3}$ et $s_2 = 3$ et (t_n) la suite définie par $t_n = \frac{s_n - 1}{s_n + 2}$.

c) La suite (t_n) *est géométrique de raison* $q = \frac{1}{2}$.

d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, *on a* $s_n = \dfrac{1 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^{2n-6}}}{1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^{2n-5}}}$.

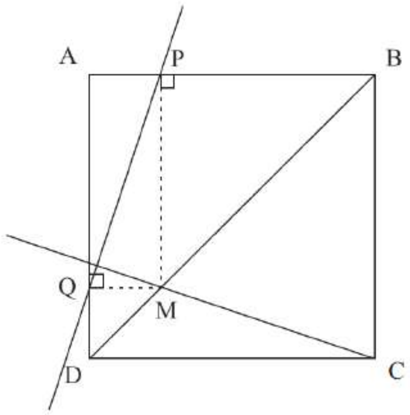
Exercice n°23 : Vecteurs et produit scalaire

$ABCD$ est un carré de côté $a > 0$.

M est un point du segment $[BD]$ distinct des points B et D.

P et Q sont les projetés orthogonaux du point M respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AD]$.

On pose $x = AP$ et $y = AQ$.



Soit $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ les vecteurs définis par :

$$\overrightarrow{i} = \frac{1}{DC}\overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{j} = \frac{1}{DA}\overrightarrow{DA}.$$

On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

a) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MC}$.

b) $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{CM} = y(a-y)$ *et* $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CM} = (x-a)x$.

c) Les droites (PQ) *et* (CM) *sont perpendiculaires.*

d) Si $\widehat{QPM} = \frac{\pi}{6}$ *rad alors* $x = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}a$.

Exercice n°24 : Études de fonctions exponentielles

Soit f la fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^x - 1}$$

g la fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_g$, définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = -x\,\mathrm{e}^x - 1$$

et h la fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_h$, définie pour tout nombre réel x non nul par :

$$h(x) = f'(x)\,.$$

a) La fonction g admet un minimum en $x = -1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)$ a le même signe que $-g(x)$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $h'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\left((x-1)\,\mathrm{e}^x + x + 3\right)}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}$.

d) $\mathscr{C}_h$ admet une tangente parallèle à la droite $\Delta : y = \dfrac{4\,\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^3}x - 2$ *au point d'abscisse $x = 1$.*