PUISSANCE ALPHA

Concours Ingénieurs Bac+5

ANNALES
Samedi 27 avril 2024

Bac technologique :
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 1h30

L'ÉPREUVE **COMPORTE 9 EXERCICES** INDEPENDANTS : **VOUS DEVEZ EN TRAITER 8**

Vous devrez OBLIGATOIREMENT traiter :

- Les **4 exercices** de la partie ***« Fondamentaux »***
- ET **4 exercices** (parmi 5) de la partie ***« Terminale technologique »***

Exercices fondamentaux

☑**Faire les exercices 1 à 4**

ET

Exercices de terminale technologique

☑**Choisir 4 exercices entre les 5 à 9**

*Si vous traitez les 5 exercices dans la partie « Terminale technologique », **seuls les 4 premiers seront corrigés.***

- Un exercice comporte **4 affirmations** repérées par les lettres **a, b, c, d.**
- Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est **vraie (V) ou fausse (F).**
- ***Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée.***

- Une réponse exacte rapporte 1 point.
- Une réponse inexacte entraîne le retrait de 0.5 point.
- Une réponse annulée ou l'abstention de réponse ne rapporte ni ne retire aucun point.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

L'usage de la calculatrice ou de tout appareil électronique est interdit.

EXERCICES FONDAMENTAUX

Faire les exercices
1 à 4

CES EXERCICES SONT OBLIGATOIRES

Exercice n°1 : Calcul algébrique

a) *La décomposition en produit de facteurs premiers du nombre* 2024 *est donnée par* $2^3 \times 11 \times 23$.

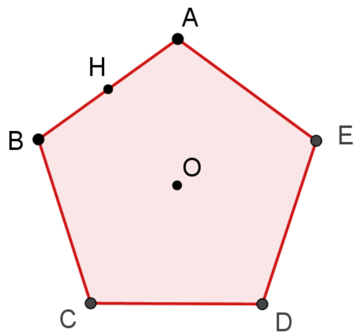
b) $\frac{\sqrt{3}^3 \times \sqrt{12}}{3\sqrt{75}} = \frac{2}{5}$

c) *Une factorisation de* $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ *est donnée par* $(3x-2)(x+1)^2$

d) $\frac{5}{3} - \frac{3}{4} > \frac{3}{4} + \frac{1}{6}$

Exercice n°2 : Un château mystérieux

On pose $x \in \mathbb{R}_+$ et on considère $ABCDE$ un pentagone régulier de côté x. On note O le centre du pentagone et H le milieu du segment $[AB]$.



a) $\widehat{ABC} = 54°$

b) $OH = \frac{1}{2} x \tan(36°)$

c) *L'aire du triangle* OAB *s'exprime, en unité d'aire, par* $\frac{x^2}{4\tan(36°)}$.

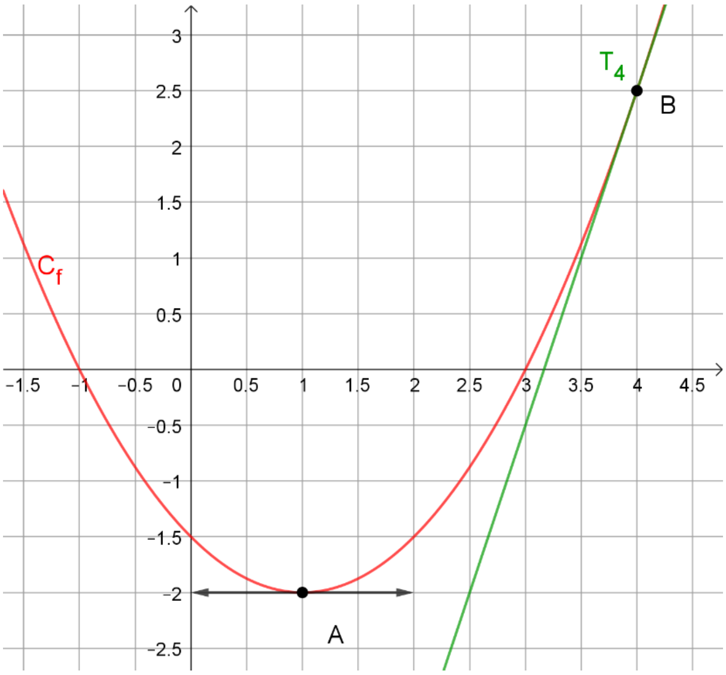
Le château de Maulnes, situé dans l'Yonne (89), est à notre connaissance à ce jour le seul château en Europe construit selon un plan pentagonal. Celui-ci est régulier et ses côtés mesurent 17 mètres. On donne $\tan(36°) \approx 0{,}73$

d) *L'aire au sol du château de Maulnes est, à plus ou moins 10 m², d'environ 500 m².*

Photo : Christophe Finot

Exercice n°3 : Lectures graphiques

Sur le graphique ci-contre, on a tracé en rouge la courbe représentative C_f d'une fonction f et en vert la droite T_4, tangente à la courbe C_f au point B d'abscisse 4. Le point A est le point de C_f d'abscisse 1.



a) $f'(1) = -2$

b) $f'(4) = 3$

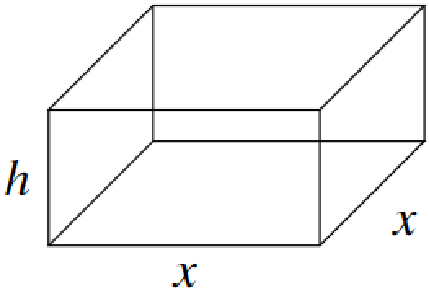
c) *Une équation de* T_4 *est :* $y = 3x + \frac{5}{2}$

d) *La fonction* f'*, dérivée de la fonction* f*, est négative sur* $[-1; 3]$.

Exercice n°4 : Problème d'optimisation

On pose x et h deux réels strictement positifs.

On souhaite fabriquer une boîte ayant la forme d'un pavé droit, de base carrée de côté x et de hauteur h, les longueurs étant exprimées en cm. Pour créer les 6 faces de la boîte, on dispose d'une machine pouvant créer des surfaces qui, une fois assemblées, auront une aire totale de 120 cm². On cherche ainsi à obtenir le plus grand volume possible.



a) *On a l'égalité suivante :* $120 = x^2 + 4xh$

b) *Le volume* V *de la boîte s'exprime en fonction de* x *via la relation :* $V(x) = 30x - 0{,}5x^3$

c) *Le volume* V *de la boîte est maximal lorsque* $x = 2\sqrt{5}$.

d) *Le volume maximal est de* $40\sqrt{5}$ *cm³*.

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES TERMINALES TECHNOLOGIQUES

Choisir 4 exercices
entre les exercices 5 et 9

Exercice n°5 : Probabilités

Une maladie touche 10 % de la population. Un test de dépistage vise à déterminer si un individu est atteint ou non par cette maladie.

La probabilité qu'un test soit positif sachant que l'individu est sain est 0,006 (on parle alors de faux positif).

La probabilité qu'un test soit négatif sachant que l'individu est malade est 0,03 (on parle alors de faux négatif).

On choisit un individu au hasard au sein de la population. On note M l'évènement « l'individu est atteint de la maladie » et T l'évènement « le test est positif ». On note respectivement $\overline{M}$ et $\overline{T}$ les événements contraires des événements M et T.

On appelle valeur diagnostique d'un test la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif.

On appelle fiabilité d'un test la probabilité $p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)$.

a) $p(T) = 0{,}1024$
b) *Les événements M et T sont indépendants.*
c) *La valeur diagnostique du test est de $\frac{97}{1024}$.*
d) *La fiabilité du test est supérieure à 99 %.*

Exercice n°6 : Suites

Camille et Dominique travaillent dans deux entreprises différentes, mais chacune leur donne en fin d'année une prime de Noël.

Camille a touché en 2023 une prime de 2000 € et sait que chaque année, celle-ci augmentera de 150 €. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le montant de la prime de Noël touchée par Camille en $2023 + n$.

Dominique a touché en 2023 la même prime que Camille, c'est-à-dire 2000 €, mais son évolution annuelle est différente : elle augmentera chaque année de 5 %. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le montant de la prime de Noël touchée par Dominique en $2023 + n$.

a) *Le terme général de la suite* (c_n) *est donné pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par :* $c_n = 2023 + 150n$.
b) *La suite* (d_n) *est géométrique de raison 0,05.*
c) *En 2025, la prime de Noël de Camille sera plus élevée que celle de Dominique.*
d) *Entre 2023 et 2027 (inclus), Dominique aura touché, au titre des primes de Noël, un montant total de* $40000\,(1{,}05^5 - 1)$ *euros.*

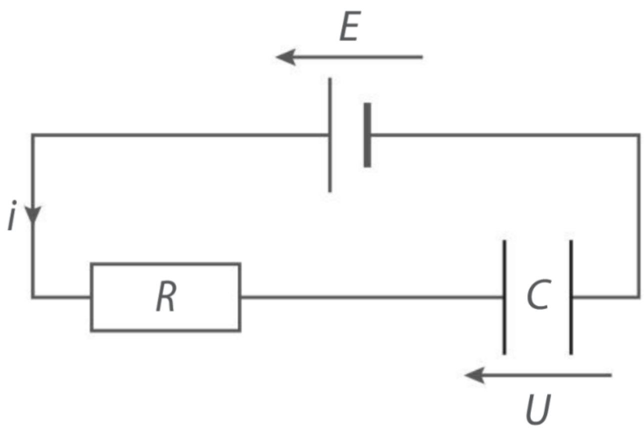
Exercice n°7 : Algèbre et logarithme

a) *La dérivée de la fonction* $f(x) = 2e^x - 2e^{-x}$ *est* $f'(x) = f(x)$.
b) $\dfrac{e^2 \times e^{-1{,}5}}{(e^{-3})^{-1{,}5}} = e^{-4}$
c) $\ln(2e) - 2\ln(8) - \ln\left(\frac{1}{16}\right) = 1 - \ln(2)$
d) *L'ensemble des solutions de l'inéquation* $\ln(3x) > -1$ *est l'intervalle* $\left]\frac{1}{3e} ; +\infty\right[$.

Exercice n°8 : Equation différentielle

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela du circuit électrique ci-contre composé de :

- une source de tension continue E de 12 V ;
- une résistance R de $10^5 \Omega$;
- un condensateur de capacité C de 10^{-6} F.



On note U la tension exprimée en volt aux bornes du condensateur. Cette tension U est une fonction du temps t exprimé en secondes.

La fonction U est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$; elle vérifie l'équation différentielle

$$RCU' + U = E$$

où U' est la fonction dérivée de U.

On suppose enfin que $U(0) = 0$.

a) *L'expression de la fonction U est* $U(t) = 12 - 12e^{-10t}$.
b) *La fonction U est décroissante sur* $[0;+\infty[$.
c) $\lim\limits_{t \to +\infty} U(t) = 10$.
d) *Le temps nécessaire, en secondes, afin d'atteindre une tension aux bornes du condensateur égale à 6 V est* $t = \frac{\ln(2)}{10}$.

Exercice n°9 : Nombres complexes

On pose :

$$z_1 = \frac{2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i)}{5+i} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad \text{et} \quad z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Par ailleurs, pour tout nombre complexe z, on note $\overline{z}$ son conjugué.

a) $z_2 = z_1$
b) $z_3 = \overline{z_2}$
c) z_3^4 *est un nombre réel strictement positif.*
d) $z_3 \times z_2 = 4i$