# X ULC Maths A 2013

## 1. Opérateurs sur les fonctions à support fini

### 1a

L'ensemble $V$ est un sous ensemble de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui est non vide puisqu'il contient l'élément nul de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Soient $f$ et $g$, deux éléments de $V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors le support de $\lambda f + g$ est inclus dans l'union des supports de $f$ et de $g$. Il est donc fini et on a bien

$$\forall (f, g, \lambda) \in V^2 \times \mathbb{C}, \quad \lambda f + g \in V$$

ce qui montre que $V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

### 1b

Soient $f$ et $g$, deux éléments de $V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout entier relatif $k$, on a

$$E(\lambda f + g)(k) = (\lambda f + g)(k+1) = \lambda f(k+1) + g(k+1) = \big(\lambda E(f) + E(g)\big)(k)$$

Donc $E$ est bien une application linéaire. De plus, le support de $E(f)$ est en bijection avec le support de $f$ (par l'application $\sigma : k \to k+1$). Par conséquent, ces deux supports sont simultanément finis, ce qui montre que $V$ est stable par $E$.

### 2

On a déjà montré que $E$ était un endomorphisme de $V$. Il reste à montrer qu'il est inversible. On définit pour cela l'application $G : V \to V$ telle que, pour tout élément $f$ de $V$, on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad G(f)(k) = f(k-1)$$

On remarque que $G$ est lui aussi un endomorphisme de $V$ et qu'il vérifie $F \circ G = G \circ F = Id_V$. On a donc montré que $E$ est inversible.

### 3a

Montrons que la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est libre : soient $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille finie de $\mathbb{C}$ indexée par $I \subset \mathbb{Z}$ telle que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$$

En évaluant l'identité précédente en $k \in I$, on montre que $\lambda_k = 0$ et ce, pour tout $k \in I$, ce qui montre que la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est libre.
Montrons que la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est génératrice. Soit $f \in V$ alors le support de $f$ est fini et $f = \displaystyle\sum_{i\in Supp(f)} f(i)v_i$. La famille engendre donc bien $V$.
Finalement, on conclut que la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une base de $V$.

### 3b

Soit $i \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier relatif $k$, on a

$$E(v_i)(k) = v_i(k+1) = v_{i-1}(k)$$

On en déduit que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $E(v_i) = v_{i-1}$.

### 4

Les endomorphismes $H \circ E$ et $E \circ H + 2E$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur la base des $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Soit $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$H \circ E(v_i) = \lambda(i-1)\, v_{i-1}$$

et

$$E \circ H(v_i) + 2E(v_i) = \big(\lambda(i) + 2\big)v_{i-1}$$

Ainsi, il y a égalité si et seulement si

(1) $$\forall i \in \mathbb{Z},\ \lambda(i-1) = \lambda(i) + 2$$

Par suite, s'il y a égalité, alors pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$,

$$\lambda(i) = \lambda(0) + \sum_{k=1}^{i} (\lambda(k) - \lambda(k-1)) = \lambda(0) - 2i$$

et

$$\lambda(-i) = \lambda(0) + \sum_{k=1}^{i} (\lambda(-k) - \lambda(-k+1)) = \lambda(0) + 2i$$

Donc, le cas $i = 0$ étant évident,

$$H \circ E = E \circ H + 2E \;\Rightarrow\; (\forall i \in \mathbb{Z},\; \lambda(i) = \lambda(0) - 2i)$$

Réciproquement, si pour tout entier relatif $i$, on a $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$ alors la relation (1) est vérifiée. On conclut que, $H \circ E = E \circ H + 2E$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$$

**5**

Les endomorphismes $E \circ F$ et $F \circ E + H$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur la base des $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Soit $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$E \circ F(v_i) = \mu(i)\, v_i$$

et

$$(F \circ E + H)(v_i) = \big(\mu(i-1) + \lambda(i)\big)\, v_i = \big(\mu(i-1) + \lambda(0) - 2i\big) v_i$$

Ainsi, il y a égalité si et seulement si,

(2) $$\forall i \in \mathbb{Z},\; \mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0) - 2i$$

Par suite, s'il y a égalité, alors pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}\mu(i) &= \mu(0) + \sum_{k=1}^{i} \big(\mu(k) - \mu(k-1)\big) = \mu(0) + \sum_{k=1}^{i} \big(\lambda(0) - 2k\big) \\ &= \mu(0) + i\lambda(0) - 2\frac{i(i+1)}{2} = \mu(0) + i\big(\lambda(0) - 1\big) - i^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mu(-i) &= \mu(0) + \sum_{k=1}^{i} \big(\mu(-k) - \mu(-k+1)\big) = \mu(0) - \sum_{k=1}^{i} \big(\lambda(0) + 2k\big) \\ &= \mu(0) - i\lambda(0) - 2\frac{i(i+1)}{2} = \mu(0) - i(\lambda(0) - 1) - i^2\end{aligned}$$

Donc, le cas $i = 0$ étant évident,

$$E \circ F = F \circ E + H \Rightarrow \big(\forall i \in \mathbb{Z},\; \mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2\big)$$

Réciproquement, si pour tout entier relatif $i$, on a $\mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2$, alors la relation (2) est vérifiée. On conclut que $E \circ F = F \circ E + H$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2$$

**6.a**

Soit $f \in V$, $S$ son support et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on a $f = \sum_{k\in S} f(k)v_k$, ce qui implique, par récurrence rapide, que

$$H^n(f) = \sum_{k\in S} f(k)\lambda(k)^n v_k \in \mathrm{Vect}\{v_k,\, k \in S\}$$

Ainsi, pour tout $f \in V$, on a

$$\mathrm{Vect}\{H^n(f),\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Vect}\{v_k,\, k \in S\}$$

Comme $S$ est fini, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{H^n(f),\, n \in \mathbb{N}\}$ est de dimension finie car c'est un sous-espace de $\mathrm{Vect}\{v_k,\, k \in S\}$ qui est de dimension finie.

**6.b**

Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $V$ stable par $H$ et non réduit à $\{0\}$. Montrons qu'il contient un des $v_i$.

Soit $f \in W \setminus \{0\}$. Le sous-espace vectoriel $W' = \mathrm{Vect}\{H^n(f),\, n \in \mathbb{N}\}$ est donc stable par $H$, de dimension finie non nulle et inclus dans $W$. Il est de plus inclus dans le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{v_k,\, k \in Supp(f)\}$ sur lequel $H$ est diagonalisable

Par suite l'endomorphisme $H_{|W'}$ est diagonalisable sur $W'$. Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, $H_{|W'}$ possède un vecteur propre que l'on note $g$. Ainsi, $g$ est aussi vecteur propre de $H$.

Il reste à montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $g = v_{k_0}$. Si on note $\lambda$ la valeur propre associée à $g$ alors

$$H(g) = \lambda g = \sum_{k \in Supp(g)} \lambda g(k) v_k = \sum_{k \in Supp(g)} g(k) \left(\lambda(0) - 2k\right) v_k$$

Par conséquent, comme $g$ ne s'annule pas sur $Supp\,(g)$, on a

$$\forall k \in Supp(g), \quad \lambda = \lambda(0) - 2k$$

Le support de $g$ a donc au plus un élément. Comme $g \neq 0$, on en déduit que son support est un singleton et que $g$ est colinéaire à un des $v_i$. Finalement, il existe $i$ tel que $v_i \in W$.

**Dans la suite de la partie I, on a**

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \lambda(i) = -2i \;\; \textbf{et} \;\; \mu(i) = 1 - i - i^2$$

**7.a**

Montrons que l'endomorphisme $F$ est injectif : soit $f \in \operatorname{Ker} F$ telle que $f \neq 0$. Comme $f = \sum_{k \in Supp(f)} f(k) v_k$, on a

$$F(f) = \sum_{k \in Supp(f)} f(k)(1 - k - k^2) v_k = 0$$

Comme la famille $(v_k)_{k \in Supp(f)}$ est libre, on en déduit que

$$\forall k \in Supp(f), \quad f(k)(1 - k - k^2) = 0$$

ce qui est absurde car le polynôme $1 - X - X^2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$ et car $f(k) \neq 0$ si $k$ est dans le support de $f$. On en déduit que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} F$ est réduit à $\{0\}$ et que l'endomorphisme $F$ est injectif.

Montrons maintenant que l'endomorphisme $F$ est surjectif. Pour tout entier relatif $n$, on a

$$v_{n+1} = F\left(\frac{1}{1 - n - n^2} v_n\right) \in ImF$$

ce qui montre que $F$ est surjectif. Ainsi, $F \in Gl(V)$.

**7.b**

Si $E$ était d'ordre fini $r > 0$ alors on aurait $E^r(v_0) = v_0$ i.e. $v_{-r} = v_0$ ce qui est absurde. Par suite, $E$ n'est pas d'ordre fini.

Si $F$ était d'ordre fini $r > 0$ alors on aurait $F^r(v_0) = v_0$ i.e. $\prod_{k=0}^{r-1} \mu(k)\ v_r = v_0$ ce qui est absurde. Par suite, $F$ n'est pas d'ordre fini.

**7.c**

Soit $f \in \mathrm{Ker} H$. Comme $f = \sum_{k \in Supp(f)} f(k) v_k$, on a

$$H(f) = \sum_{k \in Supp(f)} f(k)(-2k) v_k = 0$$

Comme la famille $(v_k)_{k \in Supp(f)}$ est libre, on en déduit que $Supp(f) \subset \{0\}$ et donc $f \in Vect\, v_0$ i.e. $\mathrm{Ker} H \subset Vect\, v_0$. Réciproquement, $v_0 \in \mathrm{Ker} H$ donc

$$\operatorname{Ker} H = Vect\, v_0.$$

Supposons qu'il existe $r \geq 1$ tel que $H^r = Id_V$ alors on aurait $H^r(v_0) = 0 = v_0$ ce qui est absurde. Par conséquent, $H$ n'est pas d'ordre fini dans le groupe $GL(V)$.

**8.a**

L'application $\Phi_E : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[E],\ P \mapsto P(E)$ est surjective par définition et est un morphisme d'algèbres. De plus, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \operatorname{Ker} \Phi_E$ alors

$$\Phi_E(P)(v_0) = \sum_{k=0}^{d} a_k E^k(v_0) = \sum_{k=0}^{d} a_k v_{-k} = 0$$

Comme la famille $(v_{-k})_{k\in[\![0,d]\!]}$ est libre, on en déduit que

$$\forall k \in [\![0,d]\!], \quad a_k = 0$$

i.e. $P = 0$. Par suite, $\Phi_E$ est un isomorphisme d'algèbres donc $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[E]$ sont isomorphes.

**8.b**

L'application $\Phi_F : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[F],\ P \mapsto P(F)$ est surjective par définition et est un morphisme d'algèbres. De plus, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \operatorname{Ker} \Phi_F$ alors

$$\Phi_F(P)(v_0) = \sum_{k=0}^{d} a_k F^k(v_0) = \sum_{k=0}^{d} a_k \prod_{i=0}^{k-1} \mu(i)\ v_k = 0$$

Comme la famille $(v_k)_{k\in[\![0,d]\!]}$ est libre, on en déduit que

$$\forall k \in [\![0,d]\!], \quad a_k \prod_{i=0}^{k-1} \mu(i) = 0$$

Le polynôme $1 - X - X^2$ n'ayant pas de racines dans $\mathbb{Z}$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![0,d]\!], \quad a_k = 0$$

i.e. $P = 0$. Par suite, $\Phi_F$ est un isomorphisme d'algèbres donc $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[F]$ sont isomorphes.

**8.c**

L'application $\Phi_H : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[H],\ P \mapsto P(H)$ est surjective par définition et est un morphisme d'algèbres. De plus, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \operatorname{Ker} \Phi_H$ alors, comme pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $v_i$ est un vecteur propre de $H$ associé à la valeur propre $-2i$, on en déduit que

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \Phi_H(P)(v_i) = 0 = P(-2i)v_i$$

donc

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad P(-2i) = 0$$

i.e. le polynôme $P$ admet une infinité de racines, ce qui prouve que $P = 0$.
Par suite, $\Phi_H$ est un isomorphisme d'algèbres donc $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[H]$ sont isomorphes.

## 2. Intermède

**9**

Par définition, $\mathbb{U}_\ell = \{q^r,\ r \in \mathbb{Z}\}$. Montrons que l'on a aussi $\mathbb{U}_\ell = \left\{(q^2)^r,\ r \in \mathbb{Z}\right\}$.
On a immédiatement $\left\{(q^2)^r,\ r \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{U}_\ell$. Réciproquement, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ell = 2p+1$. Alors $q^\ell = q^{2p+1} = 1$ donc $q = q^{-2p} = (q^2)^{-p}$. Ainsi, $q \in \left\{(q^2)^r,\ r \in \mathbb{Z}\right\}$ puis $\mathbb{U}_\ell \subset \left\{(q^2)^r,\ r \in \mathbb{Z}\right\}$.
Finalement, $\mathbb{U}_\ell = \left\{(q^2)^r,\ r \in \mathbb{Z}\right\}$ et $q^2$ est une racine primitive $\ell$-ième de l'unité.

**10.a**

Pour tout entier $i \in [\![1, \ell-1]\!]$, on a $G_a(v_i) = v_{i+1}$ et $G_a(e_\ell) = av_1$. Par conséquent,

$$G_a^\ell(v_1) = G_a^{\ell-1}(v_2) = ... = G_a(v_\ell) = av_1$$

et, pour tout entier $i \in [\![2, \ell]\!]$,

$$G_a^\ell(v_i) = G_a^\ell(G_a^{i-1}(v_1)) = G_a^{i-1}(G_a^\ell(v_1)) = G_a^{i-1}(av_1) = av_i$$

On en déduit que , $G_a^\ell = aId_{W_\ell}$.
Ainsi, $G_a$ est annulé par le polynôme $X^\ell - a$ qui est scindé à racines simples (ses racines sont les racines $\ell$-ièmes de $a$). Par conséquent, $G_a$ est diagonalisable.

**10.b**

Le polynôme $X^\ell - a$ est en fait le polynôme minimal de $G_a$. En effet, si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de degré $p$ avec $p < \ell$, alors on a

$$P(G_a)(v_0) = \sum_{k=0}^{p} a_k v_k = 0$$

Comme la famille $\{v_i, i \in [\![1, k]\!]\}$ est libre, cela implique $P = 0$. Le polynôme minimal de $G_a$ est donc de degré au moins $\ell$. On en déduit que le polynôme $X^\ell - a$ est le polynôme minimal de $G_a$. Par conséquent, les valeurs propres de $G_a$ sont donc exactement les racines $\ell$-ième de $a$ i.e. $b\mathbb{U}_\ell$.

Cherchons maintenant à décrire les espaces propres : soit $k \in [\![0, \ell-1]\!]$, $\lambda_k = bq^k$ et $f \in W_\ell$ de coordonnées $(f(0), ..., f(\ell-1))$ dans la base $\{v_i, i \in [\![0, \ell-1]\!]\}$ . On a

$$\begin{aligned} f \in E_{\lambda_k} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(i) = \lambda_k f(i+1) \quad \forall i \in [\![0, \ell-2]\!] \\ af(\ell-1) = \lambda_k f(0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![0, \ell-2]\!],\ f(i) = \lambda_k^{\ell-1-i} f(\ell-1) = a\lambda_k^{-1-i} f(\ell-1) \\ af(\ell-1) = \lambda_k f(0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![0, \ell-1]\!],\ f(i) = \lambda_k^{\ell-1-i} f(\ell-1) = a(bq^k)^{-1-i} f(\ell-1) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_{bq^k} = Vect\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} (bq^k)^{-i} v_i\right)$$

**11**

Soit $i \in \mathbb{Z}$ et $(p, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, \ell-1]\!]$ tel que $i = p\ell + r$ alors

$$P_a \circ P_a(v_i) = P_a(a^p v_r) = a^p v_r = P_a(v_i)$$

Les endomorphismes $P_a \circ P_a$ et $P_a$ coïncident donc sur la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ donc $P_a \circ P_a = P_a$ i.e. $P_a$ est un projecteur.
Par définition, $Im\, P_a \subset Vect\{v_r,\ r \in [\![0, \ell-1]\!]\} = W_\ell$ et

$$\forall r \in [\![0, \ell-1]\!], \quad v_r = Pa(v_r) \in ImP_a$$

donc $ImP_a = Vect\{v_r,\ r \in [\![0, \ell-1]\!]\} = W_\ell$

## 3. Opérateurs quantiques

**12**

Les endomorphismes $H \circ E$ et $q^2 E \circ H$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur la base des $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Soit $i \in \mathbb{Z}$,

$$H \circ E(v_i) = \lambda(i-1)v_{i-1} \quad \text{et} \quad q^2 E \circ H(v_i) = q^2\lambda(i)v_{i-1}$$

Ainsi, il y a égalité si et seulement si

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ \lambda(i-1) = q^2\lambda(i) \tag{3}$$

On suppose maintenant que cette relation est vérifiée.
Si la fonction $\lambda$ s'annule sur $\mathbb{Z}$, alors elle est identiquement nulle et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$.
Sinon, pour tout entier naturel $i \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\lambda(i) = \lambda(0) \times \prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda(k)}{\lambda(k-1)} = \lambda(0)q^{-2i}$$

et

$$\lambda(-i) = \lambda(0) \times \prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda(-k)}{\lambda(-k+1)} = \lambda(0)q^{2i}$$

Le cas $i = 0$ étant trivial, on a

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ \lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$$

Réciproquement, si pour tout entier relatif $i$, on a $\lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$, alors la relation (3) est vérifiée.
Par conséquent, $H \circ E = q^2 E \circ H$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$$

**13**

Soit $K \in \mathcal{L}(V)$ tel que, pour tout entier relatif $i$, $K(v_i) = \lambda(0)^{-1}q^{2i}v_i$ alors

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad K \circ H(v_i) = K\left(\lambda(0)q^{-2i}v_i\right) = v_i \quad \text{et} \quad H \circ K(v_i) = H\left(\lambda(0)^{-1}q^{2i}v_i\right) = v_i$$

Ainsi, $K = H^{-1}$ donc $H \in GL(V)$.

**14**

Les endomorphismes $E \circ F$ et $F \circ E + H + H^{-1}$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur la base des $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Soit $i \in \mathbb{Z}$,

$$E \circ F(v_i) = \mu(i)v_i \quad \text{et} \quad (F \circ E + H + H^{-1})(v_i) = \left(\mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}\right)v_i$$

Ainsi,

$$E \circ F = F \circ E + H + H^{-1} \Leftrightarrow \left(\forall i \in \mathbb{Z},\ \mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}\right)$$

**15.a**

Soit $i \in \mathbb{Z}$ alors

$$\lambda(i+\ell) = \lambda(0)q^{-2(i+\ell)} = \lambda(0)q^{-2i} = \lambda(i)$$

Donc $\ell$ est une période de $\lambda$ i.e. $\lambda$ est périodique sur $\mathbb{Z}$ et sa période divise $\ell$.
Soit $i \in \mathbb{Z}$ alors

$$\begin{aligned}\mu(i+\ell) &= \mu(i) + \sum_{k=0}^{\ell-1}\left(\mu(i+k+1) - \mu(i+k)\right) = \mu(i) + \lambda(0)\sum_{k=0}^{\ell-1} q^{-2k} - \lambda(0)^{-1}\sum_{k=0}^{\ell-1} q^{2k} \\ &= \mu(i) + \lambda(0)\frac{1-q^{-2\ell}}{1-q^{-2}} - \lambda(0)^{-1}\frac{1-q^{2\ell}}{1-q^2} = \mu(i)\end{aligned}$$

Donc $\ell$ est une période de $\mu$ i.e. $\mu$ est périodique sur $\mathbb{Z}$ et sa période divise $\ell$.

**15.b**

Soit $T$ une période de $\lambda$ alors $\lambda(T) = \lambda(0)$ i.e. $q^{-2T} = 1$ donc $\ell$ divise $2T$. Comme $\ell$ est impair, on en déduit que $\ell$ divise $T$. La période de $\lambda$ est donc $\ell$.

**15.c**

Soit $T$ une période de $\mu$ alors pour tout $i \in [\![0, \ell-1]\!]$, $\mu(T+i) = \mu(i)$ i.e. $\sum_{k=i}^{T+i-1} (\mu(k+1) - \mu(k)) = 0$. Donc

$$\forall i \in [\![0, \ell-1]\!], \quad \lambda(0) q^{-2i} \frac{1-q^{-2T}}{1-q^{-2}} = \lambda(0)^{-1} q^{2i} \frac{1-q^{2T}}{1-q^2}$$

Si $q^{2T} \neq 1$ alors pour tout $i \in [\![0, \ell-1]\!]$, on a

$$q^{4i} = \lambda(0)^2 \frac{1-q^{-2T}}{1-q^{-2}} \frac{1-q^2}{1-q^{2T}}$$

Le membre de droite ne dépend pas de $i$. On a donc nécessairement $q^4 = 1$, ce qui est impossible car $q$ est d'ordre $\ell$ impair. Par conséquent, $q^{2T} = 1$ et donc $T \equiv 0[\ell]$ car $q^2$ est d'ordre $\ell$. La période de $\mu$ est donc $\ell$.

**16.a**

D'après la question 14, on a

$$\begin{aligned} C &= (q-q^{-1}) E \circ F + q^{-1} H + q H^{-1} \\ &= (q-q^{-1}) \left( F \circ E + H + H^{-1} \right) + q^{-1} H + q H^{-1} \\ &= (q-q^{-1}) F \circ E + q H + q^{-1} H^{-1} \end{aligned}$$

**16.b**

Soit $i \in \mathbb{Z}$ alors

$$C(v_i) = (q-q^{-1}) \mu(i-1) v_i + q \lambda(0) q^{-2i} v_i - q^{-1} \lambda(0)^{-1} q^{2i} v_i \in Vect(v_i)$$

donc $v_i$ est un vecteur propre de $H$.

**16.c**

Soit $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ i \mapsto (q-q^{-1})\mu(i-1) + \lambda(0) q^{1-2i} - \lambda(0)^{-1} q^{2i-1}$. Montrons que $\alpha$ est constante ce qui prouvera que $C$ est une homothétie de $V$ de rapport $\alpha(1)$. Soit $i \in \mathbb{Z}$, alors on a

$$\begin{aligned} \alpha(i+1) &= (q-q^{-1}) \left( \mu(i-1) + \lambda(0) q^{-2i} - \lambda(0)^{-1} q^{2i} \right) + \lambda(0) q^{-1-2i} + \lambda(0)^{-1} q^{2i+1} \\ &= (q-q^{-1}) \mu(i-1) + \lambda(0) \left( (q-q^{-1}) q^{-2i} + q^{-1-2i} \right) - \lambda(0)^{-1} \left( (q-q^{-1}) q^{2i} + q^{2i+1} \right) \\ &= (q-q^{-1}) \mu(i-1) + \lambda(0) q^{-2i} - \lambda(0)^{-1} q^{2i} \\ &= \alpha(i) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\alpha$ est constante à $\alpha(1) = (q-q^{-1})\mu(0) + \lambda(0) q^{-1} - \lambda(0)^{-1} q$. Les endomorphismes $C$ et $\alpha(1) Id_V$ coïncident donc sur la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ce qui prouve que $C$ est une homothétie de rapport

$$R(\lambda(0), \mu(0), q) = (q-q^{-1}) \mu(0) + \lambda(0) q^{-1} - \lambda(0)^{-1} q$$

**16.d**

L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \mu \mapsto (q-q^{-1})\mu + \lambda(0) q^{-1} + \lambda(0)^{-1} q$ est une fonction affine de coefficient directeur $q - q^{-1}$ non nul car $q^2 \neq 1$. Par conséquent, c'est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

**16.e**

Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ alors on a

$$\begin{aligned} z_0 = R(z, \mu(0), q) &\Leftrightarrow z_0 = (q-q^{-1}) \mu(0) + z q^{-1} + z^{-1} q \\ &\Leftrightarrow z^2 q^{-1} + \left( (q-q^{-1}) - z_0 \right) \mu(0) z + q = 0 \end{aligned}$$

Le polynôme $z^2 q^{-1} + \left( (q-q^{-1}) - z_0 \right) \mu(0) z + q$ est de degré 2 car $q \neq 0$. Il admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. De plus, comme 0 n'est pas racine, les racines sont en fait dans $\mathbb{C}^\star$. L'application $\mathbb{C}^\star \to \mathbb{C},\ z \mapsto R(z, \mu(0), q)$ est donc surjective. De plus, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, si $\left( (q-q^{-1}) - z_0 \right)^2 \mu(0)^2 - 4 \neq 0$ (ce qui est le cas pour tous les complexes sauf deux) alors $z_0$ a deux antécédents. Ainsi, l'application $\mathbb{C}^\star \to \mathbb{C},\ z \mapsto R(z, \mu(0), q)$ est non bijective.

## 4. Opérateurs quantiques modulaires

**17.a**

Soit $\phi \in \mathcal{L}(V)$ commutant avec $P_a$ alors, comme $P_a$ est un projecteur, on a
$$P_a \circ \phi \circ P_a = P_a \circ P_a \circ \phi = P_a \circ \phi$$
Par conséquent, $\phi$ est compatible avec $P_a$.

**17.b**

Soit $i \in \mathbb{Z}$ et $(p,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, \ell-1]\!]$ tels que $i = p\ell + r$. Alors on a
$$P_a \circ H \circ P_a(v_i) = P_a\left(\lambda(0)q^{-2i}a^p v_r\right) = \lambda(0)q^{-2i}a^p v_r$$
et
$$P_a \circ H(v_i) = P_a\left(\lambda(0)q^{-2i}v_i\right)\lambda(0)q^{-2i}a^p v_r$$
donc $H$ est compatible avec $P_a$ car les endomorphismes $P_a \circ H \circ P_a$ et $P_a \circ H$ coïncident donc sur la base $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.

De même, si on considère $i \in \mathbb{Z}$ et $(p,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, \ell-1]\!]$ tels que $i = p\ell + r$, alors
$$P_a \circ H^{-1} \circ P_a(v_i) = P_a\left(\lambda(0)^{-1}q^{2i}a^p v_r\right) = \lambda(0)^{-1}q^{2i}a^p v_r$$
et
$$P_a \circ H^{-1}(v_i) = P_a\left(\lambda(0)^{-1}q^{2i}v_i\right)\lambda(0)^{-1}q^{2i}a^p v_r$$
Donc $H^{-1}$ est compatible avec $P_a$ car les endomorphismes $P_a \circ H^{-1} \circ P_a$ et $P_a \circ H^{-1}$ coïncident donc sur la base $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.

**18**

L'ensemble $\mathcal{U}_q$ est inclus dans $\mathcal{L}(V)$ et contient $0_{\mathcal{L}(V)}$ et $Id_V$.
Soient $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{U}_q$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors
$$P_a \circ (\phi_1 + \lambda\phi_2) \circ P_a = P_a \circ \phi_1 \circ P_a + \lambda P_a \circ \phi_2 \circ P_a = P_a \circ \phi_1 + \lambda P_a \circ \phi_2 = P_a \circ (\phi_1 + \lambda\phi_2)$$
et
$$P_a \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ P_a = P_a \circ \phi_1 \circ P_a \circ \phi_2 \circ P_a = P_a \circ \phi_1 \circ P_a \circ \phi_2 = P_a \circ \phi_1 \circ \phi_2$$
Par suite, $\mathcal{U}_q$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$.

**19**

Soient $i \in \mathbb{Z}$ et $(p,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, \ell-1]\!]$ tels que $i = p\ell + r$ alors
$$P_a \circ E \circ P_a(v_i) = P_a\left(a^p v_{r-1}\right) = \begin{cases} a^p v_{r-1} & \text{si } r \neq 0 \\ a^{p-1} v_{\ell-1} & \text{sinon} \end{cases}$$
et
$$P_a \circ E(v_i) = P_a\left(v_{i-1}\right) = \begin{cases} a^p v_{r-1} & \text{si } r \neq 0 \\ a^{p-1} v_{\ell-1} & \text{sinon} \end{cases}$$
donc $E$ est compatible avec $P_a$ car les endomorphismes $P_a \circ E \circ P_a$ et $P_a \circ E$ coïncident sur la base $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.

Soient $i \in \mathbb{Z}$ et $(p,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, \ell-1]\!]$ tels que $i = p\ell + r$ alors
$$P_a \circ F \circ P_a(v_i) = P_a\left(\mu(i)a^p v_{r+1}\right) = \begin{cases} \mu(r)a^p v_{r-1} & \text{si } r \neq \ell-1 \\ \mu(r)a^{p+1} v_0 & \text{sinon} \end{cases}$$
et
$$P_a \circ F(v_i) = P_a\left(\mu(i)v_{i+1}\right) = \begin{cases} \mu(i)a^p v_{r-1} & \text{si } r \neq \ell-1 \\ \mu(i)a^{p+1} v_0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Comme $\mu$ est $\ell$ périodique, $F$ est compatible avec $P_a$ car les endomorphismes $P_a \circ F \circ P_a$ et $P_a \circ F$ coïncident sur la base $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.

**20.a**

Soit $\phi \in \mathcal{U}_q$. L'endomorphisme $\Psi_a(\phi)\,:\, W_\ell \to W_\ell,\ x \mapsto P_a \circ \phi(x)$ vérifie
$$\forall x \in W_\ell, \quad \Psi_a(\phi) \circ P_a(x) = P_a \circ \phi(x)$$

Soit $\Psi \in \mathcal{L}(W_\ell)$ tel que pour tout $x \in W_\ell$, $\Psi_a(\phi) \circ P_a(x) = P_a \circ \phi(x)$ alors
$$\forall x \in W_\ell, \quad \Psi(x) = \Psi \circ P_a(x) = P_a \circ \phi(x) = \Psi_a(\phi) \circ P_a(x) = \Psi_a(\phi)(x)$$
donc $\Psi = \Psi_a(\phi)$. Ainsi, $\Psi_a(\phi)$ est l'unique endomorphisme de $W_\ell$ tel que
$$\forall x \in W_\ell, \quad \Psi_a(\phi) \circ P_a(x) = P_a \circ \phi(x)$$
De plus, soient $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{U}_q^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors
$$\forall x \in W_\ell, \quad P_a \circ (\phi_1 + \lambda\phi_2)(c) = P_a \circ \phi_1(x) + \lambda P_a \circ \phi_2(c)$$
donc $\Psi_a(\phi_1 + \lambda\phi_2) = \Psi_a(\phi_1) + \lambda\Psi_a(\phi_2) =$ et
$$\forall x \in W_\ell, \quad P_a \circ \phi_1 \circ \phi_2(x) = P_a \circ \phi_1 \circ P_a \circ \phi_2(x) = P_a \circ \phi_1 \left(\Psi_a\left(\phi_2(x)\right)\right) = \Psi_a(\phi_1)\left(\Psi_a\left(\phi_2(x)\right)\right)$$
soit $\Psi_a(\phi_1 \circ \phi_2) = \Psi_a(\phi_1) \circ \Psi_a(\phi_2)$.
Par suite, $\Psi_a$ est un morphisme d'algèbres.

**20.b**
Soit $\phi \in \mathcal{U}_q$ alors
$$\begin{aligned}\phi \in \operatorname{Ker}\Psi_a &\Leftrightarrow (\forall x \in W_\ell,\ P_a \circ \phi(x) = 0)\\ &\Leftrightarrow (\forall i \in [\![0, \ell-1]\!],\ P_a \circ \phi(v_i) = 0)\\ &\Leftrightarrow (\forall i \in [\![0, \ell-1]\!],\ \phi(v_i) \in \operatorname{Ker} P_a)\end{aligned}$$
Or, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $(p, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, \ell-1]\!]$ tel que $i = p\ell + r$,
$$P_a \circ \phi(v_i) = P_a \circ \phi \circ P_a(v_i) = P_a \circ \phi \circ P_a(v_r)$$
donc $Im(\phi) = Vect\{\phi(v_i),\ i \in [\![0, \ell-1]\!]\}$. Ainsi,
$$\phi \in \operatorname{Ker}\Psi_a \Leftrightarrow Im(\phi) \subset \operatorname{Ker} P_a$$
Comme $P_a$ est un projecteur,
$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} P_a &= Im(Id_V - P_a)\\ &= Vect\{(Id_V - P_a)(v_{p\ell+r},\ (p,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, \ell-1]\!]\}\\ &= Vect\{v_i - a^p v_r,\ (p,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, \ell-1]\!]\}\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\phi \in \operatorname{Ker}\Psi_a \Leftrightarrow Im(\phi) \subset Vect\{v_i - a^p v_r,\ (p,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, \ell-1]\!]\}$$

**21.a**
Par définition,
$$\Psi_a(E)(v_0) = P_a \circ E(v_0) = P_a(v_{-1}) = a^{-1} v_{\ell-1}$$

**21.b**
Soit $i \in [\![0, \ell-1]\!]$, alors $\Psi_a(E^\ell)(v_i) = P_a(v_{i-\ell}) = a^{-1} v_i$, donc $\Psi_a(E^\ell) = a^{-1} Id_{W_\ell}$.

**21.c**
Comme $\Psi_a(E^\ell) = a^{-1} Id_{W_\ell}$, on a
$$\mathbb{C}\left[\Psi_a(E)\right] = Vect\{\Psi_a(E^k),\ k \in [\![0, \ell-1]\!]\}$$
Montrons que la famille $\left(\Psi_a(E^k)\right)_{k \in [\![0,\ell-1]\!]}$ est libre, ce qui prouvera que $\mathbb{C}\left[\Psi_a(E)\right]$ est de dimension $\ell$.

Soit $(c_k)_{k \in [\![0,\ell-1]\!]}$, une famille telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k \Psi_a(E^k) = 0$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k \Psi_a(E^k)(v_0) = 0$. Or, pour tout $k \in [\![0, \ell-1]\!]$,
$$\Psi_a(E^k)(v_0) = P_a \circ (v_{-k}) = \begin{cases} a^{-1} v_{\ell-k} & \text{si } k \neq 0 \\ v_0 & \text{sinon} \end{cases}$$
donc $c_0 v_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell-1} c_k a^{-1} v_{\ell-k} = 0$. La liberté de la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et la non nullité de $a$ implique donc que la famille $(c_k)_{k \in [\![0,\ell-1}$ est nulle.
Par conséquent, $\mathbb{C}\left[\Psi_a(E)\right]$ est de dimension $\ell$.

**21.d**

Soit $i \in [\![0, \ell-1]\!]$ alors

$$\Psi_a(E)(v_i) = P_a \circ (v_{i-1}) = \begin{cases} v_{i-1} & \text{si } i \neq 0 \\ a^{-1} v_{\ell-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, $\Psi_a(E) = G_a^{-1}$. Les valeurs propres de $\Psi_a(E)$ sont donc les racines $\ell$-ième de $a^{-1}$ et pour tout $k \in [\![0, \ell-1]\!]$, l'espace propre associé à $\mu_k = b^{-1}q^{-k}$ est $Vect\left(\sum_{j=0}^{\ell-1} (bq^k)^{-i} v_i\right)$.

**22.a**

Soit $i \in [\![0, \ell-1]\!]$ alors $\Psi_a \circ H(v_i) = P_a(\lambda(i)v_i) = \lambda(i)v_i$. Ainsi, par le même raisonnement qu'à la question 6.b, si $f \in W \setminus \{0\}$ alors le sous-espace vectoriel $W' = Vect\{H^n(f),\, n \in \mathbb{N}\}$ est non réduit à $\{0\}$, stable par $H$, de dimension finie non nulle et inclus dans $W$. Il est de plus inclus dans le sous-espace vectoriel $Vect\{v_k,\, k \in Supp(f)\}$ sur lequel $\Psi_a \circ H$ est diagonalisable

Par suite $\Psi_a \circ H_{|W'}$ est diagonalisable. Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, $\Psi_a \circ H_{|W'}$ possède un vecteur propre $g$. Ainsi, il existe un vecteur propre de $\Psi_a \circ H$, $g$, appartenant à $W'$ et donc à $W$.

Il reste à montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $g = v_{k_0}$. Si on note $\lambda$ la valeur propre associée à $g$ alors

$$\Psi_a \circ H(g) = \lambda g = \lambda \sum_{k \in Supp(g)} g(k) v_k = \sum_{k \in Supp(g)} g(k)\lambda(0)q^{-2k} v_k$$

Par conséquent,

$$\forall k \in Supp(g), \quad \lambda = \lambda(0)q^{-2k}$$

donc le support de $g$ a au plus un élément car $\lambda(0) \neq 0$. Comme $g$ est non nulle, le support de $g$ est un singleton $\{k_0\}$ ce qui implique que $v_{k_0} \in Vect(g)$ et par conséquent que $v_{k_0}$ est un élément de $W$.

**22.b**

Si $W$ est stable par $\Psi_a(E)$ et contient $v_i$, $i \in [\![0, \ell-1]\!]$ alors $W$ contient tous les $(v_i)_{i \in [\![0, \ell-1]\!]}$ donc contient $W_\ell$. Par suite, $W = W_\ell$.

**23**

Soit $i \in [\![0, \ell-1]\!]$ alors

$$\Psi_a(F)(v_i) = P_a \circ (\mu(i)\, v_{i+1}) = \begin{cases} \mu(i) v_{i+1} & \text{si } i \neq \ell-1 \\ a\mu(\ell-1)v_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice de $\Psi_a(F)$ dans la base $(v_i)_{i \in [\![0, \ell-1]\!]}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \mu(\ell-1) \\ \mu(0) & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \mu(1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu(\ell-2) & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\Psi_a(F)^\ell = \prod_{k=0}^{\ell-1} \mu(k)\, Id_V$. Or, $\Psi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si $\Psi_a(F)^\ell = 0$ donc si et seulement si

$$\prod_{k=0}^{\ell-1} \mu(k) = 0$$

Comme

$$\forall i \in [\![0, \ell-1]\!], \quad (q - q^{-1})\mu(i) = R(\lambda(0), \mu(0), q) - \lambda(0)q^{-1-2i} + \lambda(0)^{-1}q^{2i+1}$$

l'endomorphisme $\Psi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si $R(\lambda(0), \mu(0), q) \in \left\{\lambda(0)q^{-1-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i+1},\ i \in [\![0, \ell-1]\!]\right\}$