

# École polytechnique - Écoles normales supérieures

## Concours d'admission 2014 - filière MP

### Corrigé de l'épreuve de mathématiques A

#### Préliminaires sur les formes quadratiques

Remarque : l'hypothèse sur la caractéristique de  $\mathbb{K}$  sert exclusivement à permettre la division par  $2 = 1 + 1$ , qui est essentielle pour définir  $\tilde{q}$ .

1. L'application  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  vérifie clairement la condition i) et l'application  $\tilde{q}$  associée est la forme bilinéaire symétrique  $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i : \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  est bien une forme quadratique sur  $\mathbb{K}^n$ .

2. Pour  $\varphi$  forme bilinéaire bilinéaire symétrique sur  $V$ , posons  $Q(\varphi) : x \mapsto \varphi(x, x)$ . Nous avons :

- si  $q$  est une forme quadratique sur  $V$  et  $x$  un élément de  $V$  :

$$Q(\tilde{q})(x) = \frac{1}{2} (q(2x) - q(x) - q(x)) = q(x)$$

- si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $V$ , l'application  $q = Q(\varphi)$  vérifie i) et est associée à l'application

$$\tilde{q} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} (\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x, x) - \varphi(y, y)) = \varphi(x, y).$$

$q$  est donc une forme quadratique et  $\widetilde{Q(\varphi)} = \varphi$ .

ce qui prouve le résultat demandé.

3.(a) Soit  $q$  une forme quadratique sur  $V$ ,  $x \in V$  et  $X$  le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ . Notons  $\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})X = (z_i)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall y \in V, \tilde{q}(x, y) = 0 &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \tilde{q}(e_i, x) = 0 \\ &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, z_i = 0 \\ &\iff \Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})X = 0 \end{aligned}$$

donc  $q$  est non dégénérée si et seulement si le noyau de  $\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})$  est réduit à  $\{0\}$ , i.e. si et seulement si  $\det(\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})) \neq 0$ .

3.(b) En notant  $\mathcal{B}_0$  la base canonique de  $V$ , nous avons

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

donc  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  est non dégénérée, puisque les  $a_i$  sont tous non nuls.

- 4.(a) Supposons qu'il existe un isomorphisme  $f$  de  $V$  sur  $V'$  tel que  $q' \circ f = q$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  la base de  $V'$  image de  $\mathcal{B}$  par  $f$ . Nous avons  $\Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{q}') = \Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})$  donc  $q'$  est également non dégénérée.
- 4.(b) L'application  $y \mapsto \tilde{q}(x, y)$  est une forme linéaire non nulle de  $V$  (car  $q$  est non dégénérée et  $x \neq 0$ ) : son noyau  $\{x\}^\perp$  est donc un hyperplan de  $V$ .
- 4.(c) Cet hyperplan  $H$  est supplémentaire de la droite  $\mathbb{K}x$  si et seulement si  $x$  n'est pas élément de  $H$ , i.e. si et seulement si  $q(x)$  est non nul.
5.  $O(q)$  est un sous-groupe de  $GL(V)$  :
- l'application  $Id_V$  est élément de  $O(q)$ , donc  $O(q)$  est non vide ;
  - si  $f, g \in O(q)$ ,  $q \circ (f \circ g) = (q \circ f) \circ g = q \circ g = q$  donc  $f \circ g \in O(q)$  ;
  - si  $f \in O(q)$ ,  $q \circ f^{-1} = (q \circ f) \circ f^{-1} = q$  donc  $f^{-1} \in O(q)$ .

Supposons que  $q' \circ f = q$ , avec  $f$  isomorphisme de  $V$  sur  $V'$ . Nous avons alors, pour  $g \in GL(V)$  :

$$g \in O(q) \iff q' \circ f \circ g = q' \circ f \iff q' \circ (f \circ g \circ f^{-1}) = q' \iff f \circ g \circ f^{-1} \in O(q')$$

L'application  $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$  étant clairement un isomorphisme de groupe de  $GL(V)$  sur  $GL(V')$ , sa restriction à  $O(q)$  est un isomorphisme de groupe de  $O(q)$  sur  $O(q')$ .

## Première partie : existence de bases orthogonales

- 6.(a) Comme  $q \mapsto \tilde{q}$  est bijective,  $\tilde{q}$  est nulle si et seulement si  $q$  est nulle. On en déduit qu'une forme quadratique non dégénérée est non nulle.
- 6.(b) On suppose ici que  $q$  est anisotrope et que  $V$  est un plan vectoriel. Il existe un vecteur non nul  $e_1$  de  $V$  tel que  $q(e_1) = 0$ . Soit  $\varepsilon_2$  un vecteur non colinéaire à  $e_1$  et posons  $\Phi_{(e_1, \varepsilon_2)}(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ . Pour  $x = x_1 e_1 + x_2 \varepsilon_2$ ,  $q(x) = 2ax_1 x_2 + bx_2^2$  et  $\tilde{q}(e_1, x) = ax_2$ . Comme  $q$  est non dégénérée,  $a$  est non nul et on peut définir  $e_2 = -\frac{b}{2a^2} e_1 + \frac{1}{a} \varepsilon_2$  :  $(e_1, e_2)$  est une base de  $V$ ,  $\Phi_{(e_1, e_2)}(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $q$  est isométrique à  $h$ .
- 6.(c) Fixons  $e_1$  tel que  $q(e_1) = 0$ . Comme  $q$  est non dégénérée, il existe  $e_2$  tel que  $\tilde{q}(e_1, e_2) \neq 0$  :  $e_2$  est en particulier non colinéaire à  $e_1$  et la restriction de  $q$  à  $P = \text{Vect}(e_1, e_2)$  est isométrique à  $h$ . Comme  $h(\mathbb{K}^2) = \mathbb{K}$ ,  $q(V) \supset q(P) = h(\mathbb{K}^2) = \mathbb{K}$  et  $q$  est surjective.
- 7.(a) La preuve se fait par récurrence sur la dimension de  $V$  :
- si  $V$  est de dimension 1, on choisit une base  $(e_1)$  de  $V$  et cette base est orthogonale pour  $q$ .
  - supposons que  $V$  soit de dimension  $n \geq 2$  et que le résultat ait été démontré pour toute forme non dégénérée définie sur un espace de dimension  $n - 1$ . Comme  $q$  est non nulle, il existe un vecteur  $e_1$

tel que  $q(e_1) \neq 0$ . D'après la question 4c,  $H = \{e_1\}^\perp$  est un supplémentaire de  $\mathbb{K}e_1$ . Notons  $q_H$  la restriction de  $q$  à  $H$  et fixons  $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  une base de  $H$ . La matrice de  $\tilde{q}$  dans la base  $(e_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  est égale à  $\begin{pmatrix} q(e_1) & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  où  $S = \Phi_{(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)}(\tilde{q}_H)$ . Comme  $q$  est non dégénérée,  $S$  est inversible et  $q_H$  est également non dégénérée. On peut ainsi appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base de  $H$   $(e_2, \dots, e_n)$  orthogonale pour  $q_H$  et la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $V$  orthogonale pour  $q$ .

- 7.(b) Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthogonale pour  $q$  et  $f$  l'isomorphisme de  $V$  sur  $\mathbb{K}^n$  qui envoie la base  $(e_i)$  sur la base canonique  $(e'_i)$  de  $\mathbb{K}^n$ . En posant  $a_i = q(e_i)$  pour tout  $i$ , nous avons pour tout  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  dans  $V$  :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = \langle a_1, \dots, a_n \rangle (f(x))$$

donc  $q$  est isométrique à  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , avec  $a_1, \dots, a_n$  non nuls car  $q$  est non dégénérée.

## Deuxième partie : étude de $O(q)$ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

8. Il existe une base  $(\varepsilon_i)$  orthogonale pour  $q$ . Quitte à réordonner les vecteurs, on peut supposer qu'il existe  $r$  compris entre 0 et  $n$  tel que  $q(\varepsilon_i) > 0$  pour  $i \leq r$  et  $q(\varepsilon_i) < 0$  pour  $i > r$ . En posant

$$\begin{cases} \forall i \leq r, e_i = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{q(\varepsilon_i)}} \\ \forall i > r, e_i = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{-q(\varepsilon_i)}} \end{cases}$$

nous obtenons une base de  $V$  dans laquelle la matrice de  $\tilde{q}$  est celle de  $Q_{r, n-r}$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  :  $q$  est donc isométrique à  $Q_{r,s}$ , avec  $s = n - r$ .

9. Nous avons :

$$\begin{aligned} M \in O_{r,s} &\iff f \in O(Q_{r,s}) \iff \forall X \in \mathbb{R}^n, Q_{r,s}(f(X)) = Q_{r,s}(X) \\ &\iff \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X {}^t M I_{r,s} M X = {}^t X I_{r,s} X \\ &\iff \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, {}^t X {}^t M I_{r,s} M Y = {}^t X I_{r,s} Y && \text{(avec une égalité de polarité)} \\ &\iff {}^t M I_{r,s} M = I_{r,s} && \text{(en choisissant pour } X \text{ et } Y \text{ les vecteurs de la base canonique)} \end{aligned}$$

En particulier, si  $M \in O_{r,s}$ ,  $\det({}^t M I_{r,s} M) = \det(I_{r,s})$ , donc  $\det^2(M) = 1$  : le déterminant de  $M$  vaut 1 ou à  $-1$ .

10. Comme  $O(Q_{r,s})$  est un sous-groupe de  $GL(\mathbb{R}^n)$ ,  $O_{r,s}$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  (l'application  $j$  est un isomorphisme d'algèbre).

Comme l'application  $\varphi : M \mapsto {}^t M I_{r,s} M$  est continue de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans lui-même (chaque coefficient de  $\varphi(M)$  est un polynôme en les coefficients de  $M$ ),  $O_{r,s}$  est fermé, comme image réciproque du fermé  $\{I_{r,s}\}$  par  $\varphi$ . On peut remarquer que l'énoncé un peu maladroit :  $O_{r,s}$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ce qui est plus précis qu'être un "fermé de  $GL_n(\mathbb{R})$ ", puisque  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (cela aura son importance à la question suivante).

11.  $O(n) = O_{n,0}$  et  $O_{r,s}$  sont fermés, donc  $O(n) \cap O_{r,s}$  est également un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Comme il est borné (les coefficients d'une matrice orthogonale sont éléments de  $[-1, 1]$ , puisque chacune de ses colonnes est de norme euclidienne égale à 1) et que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel normé de dimension finie, c'est un compact.

Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$  avec  $A \in M_r(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ . Nous avons :

$$M \in K_{r,s} \iff \begin{cases} {}^tAA + {}^tCC = I_r \\ {}^tAB + {}^tCD = 0 \\ {}^tBB + {}^tDD = I_s \\ {}^tAA - {}^tCC = I_r \\ {}^tAB - {}^tCD = 0 \\ {}^tBB - {}^tDD = -I_s \end{cases} \iff \begin{cases} A \in O(r) \\ C = 0 \\ B = 0 \\ D \in O(s) \end{cases}$$

puisque pour une matrice rectangulaire réelle  $M$ ,  ${}^tMM = 0$  si et seulement si  $M = 0$  :

- si  $M = 0$ ,  ${}^tMM = 0$ ;
- si  ${}^tMM = 0$ , en notant  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$ , nous avons :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \|MX\|^2 = {}^tX{}^tMMX = 0$$

donc  $M = 0$ .

On en déduit que l'application  $O(r) \times O(s) \rightarrow O_{r,s}$  est une bijection.  
 $(A, D) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

12. L'application  $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  : comme  $\mathbb{R}$  est connexe par arcs, son image  $SO(2)$  l'est également.

- 13.(a) Soit  $f \in O(Q_{2,1})$ . Pour tout  $u \in \mathbb{R}^3$ , on a :

$$f(u) \in H \iff Q_{2,1}(f(u)) = -1 \iff Q_{2,1}(u) = -1 \iff u \in H$$

Comme  $f$  est un isomorphisme,  $f(H) = H$ .

- 13.(b) L'application  $(O_{2,1}, \circ) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$  est un morphisme de groupe continu : son noyau  $SO_{2,1}$  est donc

un sous-groupe fermé de  $O_{2,1}$  ( $\{1\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^*$ ). On peut remarquer que comme  $O_{2,1}$  est un fermé de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $SO_{2,1}$  est également un fermé de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- 14.(a) Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$Q_{2,1}(r_t(x, y, z)) = x^2 + (\operatorname{ch} t y + \operatorname{sh} t z)^2 - (\operatorname{sh} t y + \operatorname{ch} t z)^2 = x^2 + (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)y^2 - (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)z^2 = Q_{2,1}(x, y, z)$$

donc  $r_t \in O(Q_{2,1})$ . Comme  $\det(r_t) = 1$  et  $z_{r_t} = \operatorname{ch} t > 0$ ,  $j(r_t) \in SO_{2,1}^+$  (à partir de cette question, l'énoncé identifie  $f$  et  $j(f)$ , puisque  $SO_{2,1}^+$  est un ensemble de matrices et pas un ensemble d'endomorphismes).

- 14.(b) Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , notons  $\rho_\theta$  la rotation d'axe  $(0, 0, 1)$  définie par :

$$j(\rho_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a clairement  $j_\theta \in SO_{2,1}$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , donc  $r_t \circ \rho_\theta \circ f \in SO_{2,1}$  pour tout  $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2$ . La question revient donc à démontrer qu'il existe  $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $r_t \circ \rho_\theta \circ f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ , ce qui assurera que  $z_{r_t \circ \rho_\theta \circ f} > 0$ .

- choix de  $\theta$  : en posant  $M = \sqrt{x_f^2 + y_f^2}$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $x_f = M \sin \theta$  et  $y_f = M \cos \theta$ . Nous avons alors  $\rho_\theta \circ f(0, 0, 1) = (0, M, z_f)$ .
- choix de  $t$  : nous cherchons  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $r_t(0, M, z_f) = (0, 0, 1)$ , ce qui s'écrit

$$\begin{cases} (\operatorname{ch} t) M + (\operatorname{sh} t) z_f = 0 \\ (\operatorname{sh} t) M + (\operatorname{ch} t) z_f = 1 \end{cases}$$

Comme  $(0, 0, 1) \in H$  et  $f \in O(Q_{2,1})$ ,  $(x_f, y_f, z_f) \in H$ , donc  $z_f^2 = 1 + x_f^2 + y_f^2 = 1 + M^2$ . On en déduit que  $z_k \geq 1$  et on peut poser  $t = -\operatorname{Argch} z_k$ .

Nous avons alors  $z_k = \operatorname{ch} t$  et  $M^2 = \operatorname{sh}^2 t$ , donc  $M = -\operatorname{sh} t$  puisque  $M \geq 0$  et  $\operatorname{sh} t \leq 0$ . Ainsi, nous avons défini un réel  $t$  tel que  $r_t \circ \rho_\theta \circ f(0, 0, 1) = r_t(0, M, z_f) = (0, 0, 1)$ .

**14.(c)** Notons  $g = r_t \circ \rho_\theta \circ f$ . La matrice  $j(g)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ a & b & -1 \end{pmatrix}$ . L'appartenance de  $g$  à  $SO_{2,1}$  se

traduit, grâce à la question 9, par les conditions  $\det(A) = 1$ ,  ${}^t A A = I_2$  et  ${}^t A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $A$  est une matrice de rotation et  $a = b = 0$  ( ${}^t A$  est inversible). Autrement-dit, il existe  $\theta' \in \mathbb{R}$  tel que  $g = \rho_{\theta'}$ , ce qui s'écrit sous la forme  $\rho_{-\theta'} \circ r_t \circ \rho_\theta \circ f = Id_V$ .

L'application  $\Phi_f : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est alors continue, à valeur dans  $SO_{2,1}^+$  et vérifie  $s \longmapsto j(\rho_{-s\theta'} \circ r_{st} \circ \rho_{s\theta} \circ f)$

$\Phi_f(0) = f$  et  $\Phi_f(1) = I_n$ , ce qui prouve la connexité par arcs de  $SO_{2,1}^+$ . En effet, pour relier deux éléments  $j(f)$  et  $j(g)$  de  $SO_{2,1}^+$  par un chemin continu tracé dans  $SO_{2,1}^+$ , il suffit d'utiliser l'arc paramétré :

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow SO_{2,1}^+ \\ s &\longmapsto \begin{cases} \Phi_f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \Phi_g(2-2s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**15.** La partie  $O_{2,1}$  est découpée en quatre "composantes", selon la valeur de  $\det f$  et le signe de  $z_f$ . Nous posons donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,1} &= \{j(f) \in O_{2,1}, \det f = 1 \text{ et } z_f > 0\} = SO_{2,1}^+ \\ \mathcal{P}_{1,-1} &= \{j(f) \in O_{2,1}, \det f = 1 \text{ et } z_f < 0\} \\ \mathcal{P}_{-1,1} &= \{j(f) \in O_{2,1}, \det f = -1 \text{ et } z_f > 0\} \\ \mathcal{P}_{-1,-1} &= \{j(f) \in O_{2,1}, \det f = -1 \text{ et } z_f < 0\} \end{aligned}$$

Ces quatre parties forment une partition de  $O_{2,1}$  et chaque partie est homéomorphe à  $SO_{2,1}$ . En effet, posons :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{1,-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_{-1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_{-1,-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement que  $\mathcal{P}_{i,j} = A_{i,j} SO_{2,1}^+$  pour tout  $(i, j) \in \{-1, 1\}$  : ainsi chaque  $\mathcal{P}_{i,j}$  est l'image de  $SO_{2,1}^+$  par l'homéomorphisme  $M \mapsto A_{i,j}M$  et  $O_{2,1}$  est la réunion de quatre sous-ensembles fermés disjoints deux à deux et connexes par arcs.

16. Considérons l'application surjective  $\Phi$  qui à tout élément  $M$  de  $O_{2,1}$  associe l'unique couple  $(i, j) \in \{-1, 1\}^2$  tel que  $M \in \mathcal{P}_{i,j}$ . On peut aussi écrire cette application sous la forme  $M \mapsto (\det(M), Z(M))$  en posant :

$$\forall f \in O(Q_{2,1}), Z(j(f)) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_f > 0 \\ -1 & \text{si } z_f < 0 \end{cases}$$

Comme  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$  est isomorphe au groupe  $(\{-1, 1\}, \times)$ , il suffit donc de démontrer que  $\Phi$  est un morphisme multiplicatif pour obtenir le résultat demandé. Pour la première composante, cela résulte directement de la propriété  $\det(MN) = \det M \times \det N$ . C'est un peu plus compliqué pour l'application  $Z$ . Remarquons pour commencer que  $Z$  est continue sur  $O_{2,1}$ , comme composée des applications continues  $j^{-1}, f \mapsto z_f$  et  $z \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{z}{|z|}$ .

Soient  $M$  et  $N$  sont deux éléments de  $O_{2,1}$  et posons  $\Phi(M) = (i, j)$  et  $\Phi(N) = (i', j')$ . Il existe deux applications continues  $\gamma$  et  $\delta$  de  $[0, 1]$  dans  $O_{2,1}$  telles que  $\gamma(0) = M, \gamma(1) = A_{i,j}, \delta(0) = N$  et  $\delta(1) = A_{i',j'}$ . L'application  $s \mapsto Z(\gamma(s) \times \delta(s))$  est continue de  $[0, 1]$  dans  $\{0, 1\}$  : elle est donc constante. On en déduit :

$$Z(MN) = Z(A_{i,j} \times A_{i',j'})$$

Comme  $Z(M) = j$  et  $Z(N) = j'$ , il reste à vérifier que  $Z(A_{i,j} \times A_{i',j'}) = jj'$ , ce qui est évident puisque les matrices considérées sont diagonales :  $z_{A_{i,j} \times A_{i',j'}} = z_{A_{i,j}} \times z_{A_{i',j'}} = jj' \in \{-1, 1\}$ .

## Troisième partie

- 17.(a) L'application  $\varphi = \widetilde{q \perp q'}$  :  $((x, x'), (y, y')) \mapsto \tilde{q}(x, y) + \tilde{q}'(x', y')$  est une forme bilinéaire sur  $V \times V'$  et  $q \perp q'$  vérifie la propriété i), donc  $q \perp q'$  est une forme quadratique sur  $V \times V'$ . Si un vecteur  $(x, x')$  de  $V \times V'$  vérifie :

$$\forall (y, y') \in V \times V', \varphi((x, x'), (y, y')) = 0$$

alors

$$\begin{cases} \forall y \in V, \tilde{q}(x, y) = \varphi((x, x'), (y, 0)) = 0 \\ \forall y' \in V', \tilde{q}'(x', y') = \varphi((x, x'), (0, y')) = 0 \end{cases}$$

donc  $(x, x') = (0, 0)$  car  $q$  et  $q'$  sont non dégénérées : on en déduit que  $q \perp q' \in \mathcal{Q}(V \times V')$ .

L'application  $f : ((x, x'), x'') \mapsto (x, (x', x''))$  est un isomorphisme d'espace vectoriel de  $(V \times V') \times V''$  sur  $V \times (V' \times V'')$  et vérifie  $(q \perp q') \perp q'' = [q \perp (q' \perp q'')] \circ f$  : les deux formes quadratiques sont bien isométriques.

- 17.(b) Soit  $f'$  un isomorphisme de  $V'$  sur  $V''$  tel que  $q'' \circ f' = q'$ . L'application  $f : (x, y) \mapsto (x, f'(y))$  est alors un isomorphisme de  $V \times V'$  sur  $V \times V''$  qui vérifie  $(q \perp q'') \circ f = q \perp q'$  : les formes quadratiques  $q \perp q'$  et  $q \perp q''$  sont isométriques dès que  $q'$  et  $q''$  le sont.

- 17.(c) L'application  $f : (x', x'') \mapsto x' + x''$  est un isomorphisme de  $V' \times V''$  sur  $V$  et pour  $(x', x'') \in V' \times V''$  :

$$q \circ f(x', x'') = q(x' + x'') = q(x) + q(x') + \underbrace{2\tilde{q}(x', x'')}_{=0} = q'(x') + q''(x'') = (q' \perp q'')(x', x'')$$

donc  $q$  et  $q' \perp q''$  sont isométriques.

**18.(a)** Pour  $y \in V$ ,  $q(s_x(y)) = q(y) - 4\frac{\tilde{q}(x,y)}{q(x)}\tilde{q}(x,y) + 4\left(\frac{\tilde{q}(x,y)}{q(x)}\right)^2 q(x) = q(y)$  et  $q(-s_x(y)) = q(s_x(y)) = q(y)$   
donc  $s_x$  et  $-s_x$  appartiennent à  $O(q)$ .

**18.(b)**  $s_{w-v} \in O(q)$  et on vérifie facilement que  $s_{w-v}(v) = w$  :

$$\begin{aligned} s_{w-v}(v) &= v - 2\frac{\tilde{q}(w-v,v)}{q(w-v)}(w-v) \\ &= v - 2\frac{\tilde{q}(w,v) - q(v)}{q(w) + q(v) - 2\tilde{q}(v,w)}(w-v) \\ &= v - \frac{\tilde{q}(w,v) - q(v)}{q(v) - \tilde{q}(v,w)}(w-v) \quad \text{car } q(v) = q(w) \\ &= w \end{aligned}$$

**18.(c)**  $q(v-w) = 0$ , donc  $2q(v) - 2\tilde{q}(v,w) = 0$ , soit  $q(v) = \tilde{q}(v,w)$ . On a alors  $q(v+w) = 4q(v) \neq 0$ , donc  $-s_{v+w} \in O(q)$  et  $-s_{v+w}(v) = -v + 2\frac{\tilde{q}(v+w,v)}{q(v+w)}(v+w) = -v + \frac{2q(v)}{4q(v)}(v+w) = w$ .

Dans tous les cas, nous avons donc construit  $f \in O(E)$  tel que  $f(v) = w$ .

**19.** Démontrons le résultat par récurrence sur la dimension  $n$  de  $V_3$ .

- si  $n = 0$ ,  $q_1 \perp q_3 = q_1$  et  $q_2 \perp q_3 = q_2$  donc le résultat est évident.
- soit  $n \geq 1$  et supposons que le résultat ait été démontré quand  $V_3$  est de dimension  $n-1$ . Nous partons donc de trois formes quadratiques  $q_i \in \mathcal{Q}(V_i)$  telles que  $q_1 \perp q_3 \cong q_2 \perp q_3$ , avec  $V_3$  de dimension  $n$ . soit  $f$  un isomorphisme de  $V_1 \times V_3$  sur  $V_2 \times V_3$  tel que  $q_1 \perp q_3 = (q_2 \perp q_3) \circ f$ . Comme  $q_3$  est non nulle, il existe  $e \in V_3$  tel que  $q_3(e) \neq 0$ . Posons  $f(0_{V_1}, e) = (x, y)$ . Nous avons :

$$q_2 \perp q_3(x, y) = (q_1 \perp q_3)(0, e) = q_3(e) = (q_2 \perp q_3)(0, e)$$

Si  $(x, y) \neq (0_{V_2}, e)$ , nous pouvons appliquer la question précédente en posant  $q = q_2 \perp q_3$ ,  $v = (x, y)$  et  $w = (0_{V_2}, e)$ , puisqu'on a bien  $q(v) = q(w) = q_3(e) \neq 0$  et  $v \neq w$  : il existe  $g \in O(q_2 \perp q_3)$  tel que  $g(x, y) = (0_{V_2}, e)$ . Si  $(x, y) = (0_{V_2}, e)$ , le résultat subsiste en choisissant pour  $g$  l'application identité. Posons alors  $h = g \circ f$  :  $h$  est un isomorphisme de  $V_1 \times V_3$  sur  $V_2 \times V_3$  tel que  $q_1 \perp q_3 = (q_2 \perp q_3) \circ h$  et  $h(0_{V_1}, e) = (0_{V_2}, e)$ .

Considérons alors les hyperplans  $H_1 = \{(0_{V_1}, e)\}^\perp$  et  $H_2 = \{(0_{V_2}, e)\}^\perp$  respectivement dans  $V_1 \times V_3$  et  $V_2 \times V_3$ . Nous avons facilement :

- $\begin{cases} H_1 = V_1 \times \{e\}^\perp \\ H_2 = V_2 \times \{e\}^\perp \end{cases}$  puisque l'hyperplan  $V_i \times \{e\}^\perp$  est contenu dans l'hyperplan  $H_i$ .

- $h(H_1) \subset H_2$  car pour  $(x, y) \in H_1$  :

$$\widetilde{q_2 \perp q_3}(h(x, y), (0_{V_2}, e)) = \widetilde{q_2 \perp q_3}(h(x, y), h(0_{V_1}, e)) = \widetilde{q_1 \perp q_3}((x, y), (0_{V_1}, e)) = 0$$

- $h(H_1) = H_2$  car  $H_1$  et  $H_2$  ont même dimension finie ( $h$  est un isomorphisme).

Notons alors  $V'_3 = \{e\}^\perp$ ,  $q'_3$  la restriction de  $q_3$  à  $V'_3$  et  $h'$  la restriction de  $h$  à  $H_1$  ( $h'$  est un isomorphisme de  $H_1$  sur  $H_2$ ). Nous avons alors :

$$\forall (x, y) \in H_1, (q_2 \perp q'_3)(h'(x, y)) = (q_2 \perp q_3)(h(x, y)) = (q_1 \perp q_3)(x, y) = (q_1 \perp q'_3)(x, y)$$

donc  $q_1 \perp q'_3 \cong q_2 \perp q'_3$ . Comme  $V'_3$  est de dimension  $n - 1$ , l'hypothèse de récurrence s'applique et  $q_1 \cong q_2$ .

**20.** Prouvons tout d'abord l'existence du couple  $(q_{an}, m)$  par récurrence sur la dimension de  $V$ .

a) Si  $V$  est de dimension 0, on pose  $m = 0$  et  $q_{an} = q$ , qui est bien une forme anisotrope sur l'espace vectoriel  $\{0\}$  ;

b) Supposons que  $q \in \mathcal{Q}(V)$ , où  $V$  est de dimension  $n \geq 2$ , et que le résultat ait été démontré pour toute forme non dégénérée sur un espace de dimension comprise entre 1 et  $n$ . Si  $q$  est anisotrope, on pose  $q_{an} = q$  et  $m = 0$ . Sinon, on choisit  $x \in V \setminus \{0\}$  tel que  $q(x) = 0$  et on choisit  $y \in V \setminus \{x\}^\perp$  (c'est possible car  $\{x\}^\perp$  est un hyperplan de  $V$ ). Comme  $x$  est isotrope,  $x \in \{x\}^\perp$  et  $(x, y)$  est une famille libre : soit  $P$  le plan qu'elle engendre. Notons  $W = P^\perp = \{z \in V, \tilde{q}(x, z) = \tilde{q}(y, z) = 0\} = \{x\}^\perp \cap \{y\}^\perp$ . Comme  $x \in \{x\}^\perp$  et  $x \notin \{y\}^\perp$ , les deux hyperplans  $\{x\}^\perp$  et  $\{y\}^\perp$  sont distincts : leur intersection  $W$  est donc de dimension  $n - 2$ . Montrons que  $P$  et  $W$  sont supplémentaires, ce qui revient à montrer que leur intersection est réduite à  $\{0\}$ , puisque la somme de leur dimension est égale à la dimension de  $V$ . Un vecteur  $z$  de  $P \cap W$  s'écrit  $z = \alpha x + \beta y$ , avec  $\tilde{q}(x, z) = \tilde{q}(z, y) = 0$ . Ceci donne  $\beta \tilde{q}(x, y) = 0$ , soit  $\beta = 0$  car  $\tilde{q}(x, y) \neq 0$ , puis  $\alpha \tilde{q}(x, y) = 0$ , soit  $\alpha = 0$  et  $z = 0$ .

En notant  $q_1$  la restriction de  $q$  à  $W$  et  $q_2$  la restriction de  $q$  à  $P$ , nous avons :

- $q \cong q_1 \perp q_2$  d'après la question 18c) ;
- $q_2 \cong h$  d'après la question 6b) ;
- d'après l'hypothèse de récurrence, il existe  $m' \in \mathbb{N}$  et  $q_{an}$  forme quadratique anisotrope telle que  $q_1 \cong q_{an} \perp m' \cdot h$  ;
- $q_1 \perp q_2 \cong q_1 \perp h$  d'après la question 17b)
- $q_1 \perp h \cong (q_{an} \perp m' \cdot h) \perp h$  d'après la question 17b) (par symétrie) ;
- $(q_{an} \perp m' \cdot h) \perp h \cong q_{an} \perp (m' + 1) \cdot h$  d'après la question 17a).

Par transitivité de la relation  $\cong$ , nous avons obtenu une forme quadratique anisotrope  $q_{an}$  et un entier naturel  $m = m' + 1$  tel que  $q \cong q_{an} \perp m \cdot h$

Montrons maintenant l'unicité (à isomorphisme près) du couple  $(q_{an}, m)$  : supposons qu'il existe deux formes quadratiques anisotropes  $q_{an}, q'_{an}$  et deux entiers naturels  $m, m'$  tels que

$$q_{an} \perp m \cdot h \cong q'_{an} \perp m' \cdot h.$$

Nous voulons montrer que  $m = m'$  et que  $q_{an} \cong q'_{an}$  : cela se fait une nouvelle fois par récurrence sur  $m$ .

a) Si  $m = 0$ ,  $q_{an} \perp m \cdot h = q_{an}$  est anisotrope, donc  $q'_{an} \perp m' \cdot h$  l'est également, ce qui impose  $m' = 0 = m$  et  $q_{an} \cong q'_{an}$ .

b) Supposons que  $m \geq 1$  et que le résultat ait été démontré pour  $m - 1$ . Par symétrie,  $m'$  est également non nul. Nous avons donc :

$$(q_{an} \perp (m - 1) \cdot h) \perp h \cong (q'_{an} \perp (m' - 1) \cdot h) \perp h$$

donc

$$q_{an} \perp (m - 1) \cdot h \cong q'_{an} \perp (m' - 1) \cdot h$$

d'après la question 19 : l'hypothèse de récurrence donne donc  $m - 1 = m' - 1$  et  $q_{an} \cong q'_{an}$ .