École Polytechnique - ENS de Lyon, Cachan, Rennes
Filière MP - Composition A - 15 avril 2015

Corrigé par Marc Pauly (marco_pauly@yahoo.fr)

Questions préliminaires

1. (a) $\boxed{\text{Inclusion :}}$ Si $U \in O_n(\mathbb{R})$, alors U est inversible car $1 = \det I_n = \det({}^tUU) = (\det U)^2$ et donc $\det U \neq 0$.

$\boxed{\text{Neutre :}}$ La matrice identité I_n est orthogonale.

$\boxed{\text{Stabilité :}}$ Soient U, V dans $O_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} {}^t(UV^{-1})(UV^{-1}) &= {}^tV^{-1}({}^tUU)V^{-1} \\ &= {}^tV^{-1}V^{-1} \\ &= (V{}^tV)^{-1} \\ &= I_n^{-1} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Ainsi on a encore $UV^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

(b) Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme sup sur les coefficients. Le choix de la norme importe peu, puisque toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes, ce qui rend la notion de compacité indépendante de la norme.

Il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée et fermée pour la norme sup $\|\cdot\|$ sur les coefficients.

$\boxed{O_n \text{ est borné :}}$ Toute colonne d'une matrice orthogonale étant de norme 1, tous les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent à $[-1, 1]$. Donc pour tout $U \in O_n(\mathbb{R})$, $\|U\| \leqslant 1$. Le groupe orthogonal est borné.

$\boxed{O_n \text{ est fermé :}}$ L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \mapsto {}^tMM$ est continue. En effet, la transposition est continue (en tant qu'endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie) et la multiplication matricielle est continue (en tant qu'application bilinéaire entre espaces de dimension finie). Or le singleton $\{I_n\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $f^{-1}(\{I_n\})$ est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin $f^{-1}(\{I_n\}) = O_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est un compact de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. $\boxed{\text{Si :}}$ Comme M, N sont symétriques, il existe par le théorème spectral des matrices orthogonales P_M, P_N et des matrices diagonales (à diagonales supposées décroissantes, sans restreindre la généralité) D_M, D_N avec

$$M = P_M D_M P_M^{-1}, \quad N = P_N D_N P_N^{-1}.$$

Mais alors

$$\chi_{D_M} = \chi_M = \chi_N = \chi_{D_N}.$$

Deux matrices diagonales, à diagonales décroissantes, et de même polynôme caractéristique sont nécessairement égales. Ceci découle directement de l'étude des racines (multiplicités comprises) de ce polynôme. Donc $D_M = D_N$, c'est-à-dire $P_M^{-1}MP_M = P_N^{-1}NP_N$ et enfin

$$N = UMU^{-1},$$

en posant $U = P_N \cdot P_M^{-1}$. Cette matrice est bien orthogonale puisque P_M, P_N le sont et que $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication.

$\boxed{\text{Seulement si :}}$ Comme $N = UMU^{-1}$, N et M sont semblables, donc ont même polynôme caractéristique.

3. $\boxed{j \leqslant i \leqslant i+1 :}$ On a, notamment par l'hypothèse d'enlacement, $x > \mu_{j+1} \geqslant \lambda_{j+2}$ et $\lambda_j \geqslant \mu_j \geqslant x$ et donc

$$\lambda_j \geqslant x > \lambda_{j+2}$$

Comme on a en outre $\lambda_i \geqslant x > \lambda_{i+1}$, il faut par transitivité $\lambda_i > \lambda_{j+2}$ et $\lambda_j > \lambda_{i+1}$. Ces deux dernières inégalités imposent respectivement $i < j+2$ et $j < i+1$, ou encore $j \leqslant i \leqslant j+1$.

$\boxed{\widehat{\lambda}', \widehat{\mu}' \text{ enlacés :}}$

Cas 1 : $i = j$. On a alors

$$\lambda'_p = \begin{cases} \lambda_p & \text{si} \quad 1 \leqslant p \leqslant i \\ x & \text{si} \quad p = i+1 \\ \lambda_{p-1} & \text{si} \quad i+2 \leqslant p \leqslant n+2 \end{cases}$$

et

$$\mu'_q = \begin{cases} \mu_q & \text{si} \quad 1 \leqslant q \leqslant i \\ x & \text{si} \quad q = i+1 \\ \mu_{q-1} & \text{si} \quad i+2 \leqslant q \leqslant n+1. \end{cases}$$

On observe

$$\forall q \in [\![1, n+1]\!], \lambda'_q \geqslant \mu'_q \geqslant \lambda'_{q+1}$$

en distinguant les cas $q < i+1, q = i+1, q > i+1$, et en utilisant l'hypothèse d'enlacement de $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$.

Cas 2 : $i = j+1$. On a alors

$$\lambda'_p = \begin{cases} \lambda_p & \text{si} \quad 1 \leqslant p \leqslant i \\ x & \text{si} \quad p = i+1 \\ \lambda_{p-1} & \text{si} \quad i+2 \leqslant p \leqslant n+2 \end{cases}$$

et

$$\mu'_q = \begin{cases} \mu_q & \text{si} \quad 1 \leqslant q \leqslant i-1 \\ x & \text{si} \quad q = i \\ \mu_{q-1} & \text{si} \quad i+1 \leqslant q \leqslant n+1. \end{cases}$$

On observe à nouveau

$$\forall q \in [\![1, n+1]\!], \lambda'_q \geqslant \mu'_q \geqslant \lambda'_{q+1}$$

en distinguant cette fois les cas $q < i, q = i, q > i$.

Première partie

4. (a) La famille proposée est indexée par un ensemble de cardinal $n+1$, qui est aussi la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit donc de montrer la liberté de la famille. Soient $\lambda_0, ..., \lambda_n$ des réels tels que

$$\lambda_0 Q_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j = 0.$$

Fixons $k \in [\![1, n]\!]$. L'évaluation en μ_k fournit $\lambda_k P_k(\mu_k) = 0$, et comme $P_k(\mu_k) \neq 0$ (les μ_i sont deux à deux distincts), on trouve $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Il reste alors

$$\lambda_0 Q_0 = 0$$

Le polynôme Q_0 étant non nul, l'intégrité de $\mathbb{R}[X]$ impose $\lambda_0 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille proposée est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

(b)

$$\begin{aligned} (-1)^{j-1} P_j(\mu_j) &= (-1)^{j-1} \prod_{k=1}^{j-1} (\mu_j - \mu_k) \prod_{k=j+1}^{n} (\mu_j - \mu_k) \\ &= \prod_{k=1}^{j-1} (\mu_k - \mu_j) \prod_{k=j+1}^{n} (\mu_j - \mu_k). \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, tous les facteurs sont strictement positifs. Leur produit l'est alors également.

5. (a) Il est équivalent de montrer l'existence d'un unique vecteur $(a, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que

$$XQ_0 - P = aQ_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j.$$

Or le polynôme $XQ_0 - P$ est de degré au plus $n+1$, car $\deg(Q_0) = n, \deg(P) = n+1$. En outre, le coefficient de X^{n+1} de $XQ_0 - P$ est nul, ce qui donne $XQ_0 - P \in \mathbb{R}_n[X]$. On conclut alors par le résultat de la question 4.a, qui établit que $(Q_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Évaluons $P = (X-a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j$ en μ_k. On trouve

$$P(\mu_k) = 0 - \alpha_k P_k(\mu_k) = (-1)^k \alpha_k (-1)^{k-1} P_k(\mu_k).$$

Comme $\alpha_k > 0$ et $(-1)^{k-1} P_k(\mu_k) > 0$, on observe que $P(\mu_k)$ est du signe de $(-1)^k$. Ensuite, comme P est un polynôme unitaire de degré $n+1$,

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = (-1)^{n+1}\infty.$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue P, cette fonction possède au moins un zéro dans chacun des $n+1$ intervalles ouverts

$$]-\infty, \mu_n[,]\mu_n, \mu_{n-1}[, ...,]\mu_2, \mu_1[,]\mu_1, +\infty[.$$

Comme P est de degré $n+1$, chacun de ces intervalles contient une unique racine. Ainsi

$$\boxed{P \text{ a } n+1 \text{ racines réelles distinctes}}$$

Appelons ces racines

$$\lambda_{n+1}, \lambda_n, ..., \lambda_1$$

dans l'ordre ci-dessus des intervalles. Par construction,

$$\lambda_{n+1} < \mu_n < \lambda_n < \mu_{n-1} < \cdots < \lambda_2 < \mu_1 < \lambda_1$$

et donc

$$\boxed{\hat{\lambda} \text{ et } \hat{\mu} \text{ sont strictement enlacés}}.$$

(c) Par évaluation de $P = (X-a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j$ en μ_k,

$$P(\mu_k) = -\alpha_k P_k(\mu_k) = (-1)^k \alpha_k (-1)^{k-1} P_k(\mu_k).$$

Comme $(-1)^{k-1} P_k(\mu_k) > 0$, $\boxed{\alpha_k \text{ est du signe de } (-1)^k P(\mu_k)}$ (qui est non nul, car sinon μ_k serait une racine de P, ce qui est absurde).

Le polynôme P est unitaire de degré $n+1$ et s'annule en $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}$. Ainsi P est strictement positif sur $]\lambda_1, +\infty[$, et comme le signe de P change à chacune des racines de P (elles sont évidemment toutes simples), le signe de P sur $]\lambda_{k+1}, \lambda_k[$ est celui de $(-1)^k$. Or $\mu_k \in]\lambda_{k+1}, \lambda_k[$, donc $P(\mu_k)$ est du signe de $(-1)^k$.

Il en découle que α_k est du signe de $(-1)^k(-1)^k = +1$. Bref $\alpha_k > 0$ quel que soit k.

6. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Le réel μ_k est racine d'ordre m_k de Q_1, et racine d'ordre $m_k - 1$ de Q_1'. Par conséquent $(X - \mu_k)^{m_k - 1}$ divise Q_1 et Q_1' et donc

$$(X - \mu_k)^{m_k - 1} | Q_1 \wedge Q_1'.$$

En outre la famille des polynômes $((X - \mu_k)^{m_k - 1})_{k \in [\![1,n]\!]}$ est formée de polynômes deux à deux premiers entre eux, ce qui implique

$$\prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)^{m_k - 1} | Q_1 \wedge Q_1'.$$

D'autre part

$$Q_1 \wedge Q_1' | Q_1 = \prod_{k=1}^{n} (X-\mu_k)^{m_k}$$

On en déduit que

$$Q_1 \wedge Q_1' = \prod_{k=1}^{n} (X-\mu_k)^{d_k}$$

avec $d_k \in \{m_k - 1, m_k\}$.

Enfin μ_k n'est pas racine d'ordre m_k de Q_1', donc $(X-\mu_k)^{m_k}$ ne divise pas Q_1'. Il vient alors $d_k \neq m_k$ (car le contraire conduit à la négation de la phrase précédente) et donc $d_k = m_k - 1$. On a bien

$$\boxed{Q_1 \wedge Q_1' = \prod_{k=1}^{n} (X-\mu_k)^{m_k-1}}.$$

7. (a) Notons $\overline{J} = [\![1,n]\!] \setminus J$ l'ensemble des indices j pour lesquels $\alpha_j \neq 0$.
Il est évident que

$$\left.\frac{Q_1}{\prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)}\right| Q_1$$

Ensuite

$$P = Q_1 \left(X - a - \sum_{j\in\overline{J}} \frac{\alpha_j}{X-\mu_j} \right) = \frac{Q_1}{\prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)} S,$$

où S est un polynôme réel qui ne s'annule pas sur $\{\mu_j | j \in \overline{J}\}$.
En particulier

$$\left.\frac{Q_1}{\prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)}\right| P,$$

de sorte que

$$\left.\frac{Q_1}{\prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)}\right| P \wedge Q_1.$$

Alors il existe un polynôme unitaire T tel que

$$P \wedge Q_1 = \frac{Q_1}{\prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)} T$$

Comme $P \wedge Q_1 | Q_1$, il faut $T | \prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)$.
D'autre part, comme

$$\frac{Q_1}{\prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)} T = P \wedge Q_1 | P = \frac{Q_1}{\prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)} S,$$

il faut $T|S$.
Bref, T divise S (qui ne s'annule pas sur $\{\mu_j | j \in \overline{J}\}$) et T divise $\prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)$. Dès que $T \neq 1$, ceci conduit à une contradiction. Il faut donc $T = 1$.

$$\boxed{P \wedge Q_1 = \frac{Q_1}{\prod_{j\in\overline{J}}(X-\mu_j)}}$$

(b) Notons N le degré de Q_1. Alors $N+1$ est le degré de P.
On écrit, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\mu_j | j \in \overline{J}\}$,

$$P(x) = \frac{Q_1(x)}{\prod_{j\in\overline{J}}(x-\mu_j)} \cdot \prod_{j\in\overline{J}} (x-\mu_j) \cdot \rho(x),$$

où $\rho(x) = x - a - \sum_{j \in \overline{J}} \frac{\alpha_j}{x - \mu_j}$. On observe que

$$\lim_{x \to +\infty} \rho(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \rho(x) = -\infty, \text{ et } \quad \forall j \in \overline{J}, \lim_{x \to \mu_j^+} \rho(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to \mu_j^-} \rho(x) = +\infty.$$

Comme ρ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\mu_j | j \in \overline{J}\}$, qui est l'union de $1 + \mathrm{Card}(\overline{J})$ intervalles ouverts délimités par les μ_j ($j \in \overline{J}$), on trouve (grâce au théorème des valeurs intermédiaires) $1 + \mathrm{Card}(\overline{J})$ zéros réels de ρ, qui n'appartiennent pas à $\{\mu_j | j \in \overline{J}\}$.
Posons $S(x) = \prod_{j \in \overline{J}} (x - \mu_j) \cdot \rho(x)$, qui est une fonction polynomiale. Celle-ci possède donc au moins $1 + \mathrm{Card}(\overline{J})$ racines réelles.
Comme pour tout x réel

$$P(x) = \frac{Q_1(x)}{\prod_{j \in \overline{J}} (x - \mu_j)} \cdot S(x)$$

et que le premier facteur possède exactement $N - \mathrm{Card}(\overline{J})$ racines (comptées avec multiplicités), on trouve pour le polynôme P au moins

$$(N - \mathrm{Card}(\overline{J})) + (1 + \mathrm{Card}(\overline{J})) = N + 1$$

racines réelles. $\boxed{\text{Toutes les racines de } P \text{ sont réelles.}}$

Deuxième partie

8. L'identification des 4 blocs correspond aux conditions

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A & = & A \\ B & = & AU \\ C & = & C \\ D & = & CU + V. \end{array} \right.$$

Il suffit de prendre

$$U = A^{-1}B, \quad V = D - CA^{-1}B.$$

Enfin, par la formule pour les déterminants triangulaires par blocs,

$$\begin{aligned} \det M &= \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_s \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} I_r & U \\ 0 & V \end{bmatrix} \\ &= \det A \cdot \det V \\ &= \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B). \end{aligned}$$

9. (a) Par le théorème spectral appliqué à la matrice symétrique A, il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $PA^{\mathrm{t}}P = \Delta(\mu_1, ..., \mu_n)$. On pose ensuite

$$U = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in O_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Alors

$$\begin{aligned} UM^{\mathrm{t}}U &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & y \\ {}^{\mathrm{t}}y & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PA & Py \\ {}^{\mathrm{t}}y & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PA^{\mathrm{t}}P & Py \\ {}^{\mathrm{t}}(Py) & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta(\mu_1, ..., \mu_n) & z \\ {}^{\mathrm{t}}z & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

après avoir posé $z = Py$.

(b) En utilisant 9.a et 8 (notamment la partie admise), on obtient

$$\begin{aligned}
\chi_M &= \chi_{UM^tU} \\
&= \det \begin{bmatrix} X-\mu_1 & & & \vdots \\ & \ddots & & -z \\ & & X-\mu_n & \vdots \\ \cdots & -{}^tz & \cdots & X-a \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} X-\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X-\mu_n \end{bmatrix} \cdot \det \left(X - a - {}^tz \begin{bmatrix} \frac{1}{X-\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{X-\mu_n} \end{bmatrix} z \right) \\
&= Q_0 \left(X - a - \sum_{j=1}^n z_j \frac{1}{X-\mu_j} z_j \right) \\
&= (X-a)Q_0 - \sum_{j=1}^n z_j^2 \frac{Q_0}{X-\mu_j}.
\end{aligned}$$

Il suffit alors de poser $\alpha_j = z_j^2 \in \mathbb{R}_+$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

(c) $\mathrm{Sp}(M)$ est le $(n+1)$-uplet ordonné des racines de $\chi_M = (X-a)Q_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{Q_0}{X-\mu_j}$.

$\mathrm{Sp}(A)$ est le n-uplet ordonné des racines de Q_0. On appelle d le nombre de racines **distinctes** de Q_0, et on les note $\nu_1 > \cdots > \nu_d$. On notant n_k la multiplicité de la racine ν_k dans Q_0, on a

$$Q_0 = \prod_{k=1}^d (X-\nu_k)^{n_k}.$$

Observons par ailleurs que

$$\chi_M = (X-a)Q_0 - \sum_{k=1}^d \beta_k \frac{Q_0}{X-\nu_k},$$

avec $\beta_k = \sum_{j \text{ tels que } \mu_j = \nu_k} \alpha_j \geqslant 0$ pour tout k.

Comme les polynômes χ_M, Q_0 sont reliés comme dans la question 7, et que les β_k sont tous positifs, on applique le résultat admis après 7.b : le $(n+1)$-uplet des racines de χ_M et le n-uplet des racines de Q_0 sont enlacés.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) \text{ et } \mathrm{Sp}(A) \text{ sont enlacés.}}$$

10. Comme $\mathcal{C}_M$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, espace vectoriel normé de dimension finie (équipé par exemple de la norme sup sur les coordonnées), il suffit de montrer que $\mathcal{C}_M$ est borné et fermé.

$\boxed{\mathcal{C}_M \text{ est borné :}}$ Soit $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n+1}$ le spectre ordonné de M. Soit U un élément quelconque de $O_{n+1}(\mathbb{R})$. Notons $A = (UMU^{-1})_{\leqslant n}$. D'une part $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(UMU^{-1})$, et d'autre part le résultat 9.c affirme que $\mathrm{Sp}(A)$ et $\mathrm{Sp}(UMU^{-1})$ sont enlacés. Si on note

$$\mathrm{Sp}((UMU^{-1})_{\leqslant n}) = \mathrm{Sp}(A) = (\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n)$$

alors

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant \lambda_{n+1}.$$

Ainsi pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mu_j \in [\lambda_{n+1}, \lambda_1]$, ce qui signifie que

$$\|\mathrm{Sp}((UMU^{-1})_{\leqslant n})\|_\infty \leqslant \max(|\lambda_{n+1}|, |\lambda_1|).$$

Le majorant est indépendant de U, donc $\mathcal{C}_M$ est borné.

$\boxed{\text{Si } S_q \to S \text{ alors } \chi_{S_q} \to \chi_S :}$ Soit (S_q) une suite de matrices symétriques convergeant (pour une norme quelconque sur $S_n(\mathbb{R})$) vers la matrice symétrique S. Montrons que la suite (χ_{S_q}) des polynômes caractéristiques converge (pour une norme quelconque sur $\mathbb{R}_n[X]$) vers le polynôme caractéristique de S. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la suite des coefficients de X^k dans χ_{S_q} converge vers le coefficient de X^k dans χ_S lorsque $q \to +\infty$.

On sait que le coefficient de X^k du polynôme caractéristique de S_q est une fonction polynomiale (homogène de degré $n-k$) des n^2 coefficients de S_q. Cette fonction est donc continue. Comme en outre

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{q \to +\infty} (S_q)_{ij} = S_{ij}$$

par l'hypothèse $S_q \to S$, on trouve bien $\chi_{S_q} \to \chi_S$.

$\boxed{\mathcal{C}_M \text{ est fermé :}}$ Il suffit de montrer que pour tout $V \in \mathbb{R}^n$ qui est limite d'une suite à valeurs dans $\mathcal{C}_M$, on a $V \in \mathcal{C}_M$. On suppose donc qu'il existe une suite $(U_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de matrices dans $O_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{q \to +\infty} \mathrm{Sp}((U_q M U_q^{-1})_{\leqslant n}) = V.$$

On sait par 1.b) que $O_{n+1}(\mathbb{R})$ est un compact. La suite (U_q) possède alors une valeur d'adhérence $U \in O_{n+1}(\mathbb{R})$: il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $U_{\varphi(q)} \to U$ lorsque $q \to +\infty$. Observons que $U_q^{-1} = {}^{\mathrm{t}}U_q$. De $U_{\varphi(q)} \to U$ découle alors

$$(U_{\varphi(q)} M {}^{\mathrm{t}}U_{\varphi(q)})_{\leqslant n} \to (UM{}^{\mathrm{t}}U)_{\leqslant n}$$

Ceci est dû à la continuité de la transposition, de la multiplication matricielle, et du passage à une sous-matrice.

Notons $S_q = (U_{\varphi(q)} M {}^{\mathrm{t}}U_{\varphi(q)})_{\leqslant n}$ et $S = (UM{}^{\mathrm{t}}U)_{\leqslant n}$. Ce sont des matrices symétriques $n \times n$, avec en outre $S_q \to S$. Par construction $\boxed{\mathrm{Sp}(S) \in \mathcal{C}_M}$.

Notons

$$\mathrm{Sp}(S_q) = (\lambda_{1,q} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n,q}), \qquad \mathrm{Sp}(S) = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n).$$

Alors pour tout q,

$$\chi_{S_q} = (X - \lambda_{1,q}) \cdots (X - \lambda_{n,q}) \quad (*)$$

Comme $\lim_{q \to +\infty} \mathrm{Sp}((U_q M U_q^{-1})_{\leqslant n}) = V$, il en découle par passage à une sous-suite que

$$\lim_{q \to +\infty} \mathrm{Sp}(S_q) = V.$$

De manière plus explicite

$$\lim_{q \to +\infty} \lambda_{1,q} = V_1, \ldots, \lim_{q \to +\infty} \lambda_{n,q} = V_n.$$

Passant à la limite sur q dans $(*)$, on obtient, notamment par le lemme précédent ($\chi_{S_q} \to \chi_S$),

$$\chi_S = (X - V_1) \cdots (X - V_n)$$

et donc, par passage à l'ensemble ordonné des racines, $\mathrm{Sp}(S) = V$. Nous avons bien prouvé $\boxed{V \in \mathcal{C}_M}$.

$$\boxed{\mathcal{C}_M \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n.}$$

11. (a) Posons $P = \chi_M$ (unitaire de degré $n+1$) et $Q_0 = \prod_{k=1}^{n}(X - \mu_k)$. On sait par la question 5.a qu'il existe un unique vecteur $(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\chi_M = P = (X - a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j$$

avec $P_j = \dfrac{Q_0}{X-\mu_j}$. Par 5.c) tous les α_j sont strictement positifs (on utilise ici l'enlacement strict). On forme à présent la matrice-colonne

$$z = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix}$$

puis la matrice (définie par blocs)

$$N = \begin{bmatrix} \Delta(\mu_1, ..., \mu_n) & z \\ {}^{\mathrm{t}}z & a \end{bmatrix}.$$

En utilisant la formule de la question 8, on prouve comme dans 9.b) que

$$\chi_N = \det(XI_{n+1} - N) = (X-a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} (\sqrt{\alpha_j})^2 \frac{Q_0}{X-\mu_j}.$$

D'où $\chi_N = \chi_M$. En outre, N, M sont symétriques, donc par la question 2, il existe $U \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $N = UMU^{-1}$.
Enfin

$$\mathrm{Sp}((UMU^{-1})_{\leqslant n}) = \mathrm{Sp}(\Delta(\mu_1, ..., \mu_n)) = \widehat{\mu}.$$

Ainsi $\boxed{\widehat{\mu} \in \mathcal{C}_M.}$

(b) On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des n-uplets $\widehat{\mu}$ tels que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\widehat{\mu}$ soient enlacés, et $\mathcal{E}'$ l'ensemble des n-uplets strictement ordonnés $\widehat{\mu}$ tels que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\widehat{\mu}$ soient strictement enlacés.
On doit montrer que $\mathcal{C}_M = \mathcal{E}$.
On sait par la question 9.c que $\mathcal{C}_M \subset \mathcal{E}$. Par la question 11.a) on a $\mathcal{E}' \subset \mathcal{C}_M$. On passe à l'adhérence :

$$\overline{\mathcal{E}'} \subset \overline{\mathcal{C}_M} = \mathcal{C}_M.$$

En effet on a montré à la question 10 que $\mathcal{C}_M$ est compact, donc fermé.
Pour conclure, il suffit de montrer $\boxed{\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{E}'}}$.
Il est clair que si $[\lambda, \lambda']$ est un segment de $\mathbb{R}$ (avec $\lambda < \lambda'$), et $\mu \in [\lambda, \lambda']$, alors il existe une suite à valeurs dans $]\lambda, \lambda'[$ qui converge vers μ.
Appliquant ce lemme aux n segments $[\lambda_{n+1}, \lambda_n], ..., [\lambda_2, \lambda_1]$ et à un n-uplet $\widehat{\mu}$ tel que $\forall j \in [\![1, n]\!], \mu_j \in [\lambda_{j+1}, \lambda_j]$, on montre que $\widehat{\mu}$ est la limite d'une suite de n-uplets qui sont tous strictement enlacés avec $\mathrm{Sp}(M)$. Ainsi $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{E}'}$.
Comme on a désormais $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}_M \subset \mathcal{E}$, on arrive à la conclusion $\boxed{\mathcal{C}_M = \mathcal{E}}$.

Troisième partie

12. Soit $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice orthogonale quelconque. Alors

$$\begin{aligned} U \cdot \Delta(\lambda_1, \lambda_2) \cdot U^{-1} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_1 & d\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2\lambda_1 + b^2\lambda_2 & * \\ * & c^2\lambda_1 + d^2\lambda_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Or $\{UMU^{-1} | U \in O_2(\mathbb{R})\} = \{U \cdot \Delta(\lambda_1, \lambda_2) \cdot U^{-1} | U \in O_2(\mathbb{R})\}$ grâce au théorème spectral.
Il en découle que

$$\mathcal{D}_M = \left\{ (a^2\lambda_1 + b^2\lambda_2, c^2\lambda_1 + d^2\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in O_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Comme toute matrice orthogonale 2×2 est de la forme $\begin{bmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{bmatrix}$, on a nécessairement

$$a^2 = d^2, b^2 = c^2, a^2 + b^2 = 1, a^2, b^2 \in [0,1].$$

Ainsi, comme

$$(a^2\lambda_1 + b^2\lambda_2, c^2\lambda_1 + d^2\lambda_2) = a^2(\lambda_1, \lambda_2) + b^2(\lambda_2, \lambda_1),$$

$\boxed{\mathcal{D}_M \text{ est inclus dans le segment d'extrémités } (\lambda_1, \lambda_2) \text{ et } (\lambda_2, \lambda_1)}$.

Réciproquement, si $t \in [0,1]$, il existe une matrice orthogonale $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telle que $a^2 = d^2 = t, b^2 = c^2 = 1 - t$, par exemple $\begin{bmatrix} \sqrt{t} & -\sqrt{1-t} \\ \sqrt{1-t} & \sqrt{t} \end{bmatrix}$.

Donc $\boxed{\text{le segment d'extrémités } (\lambda_1, \lambda_2) \text{ et } (\lambda_2, \lambda_1) \text{ est inclus dans } \mathcal{D}_M}$.

L'égalité des ensembles suit par double inclusion.

13. (a) Lorsque $s = n$, il y a toujours égalité, car on sait que pour une matrice symétrique (donc diagonalisable), la trace est égale à la somme des valeurs propres (éventuellement répétées).

(b) On note $\widehat{\mu} = (\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1})$ le spectre ordonné de la matrice symétrique $M_{\leqslant n-1}$. Comme $\sum_{i=1}^{n-1} m_{ii}$ est la trace de $M_{\leqslant n-1}$, c'est aussi la somme des valeurs propres $\mu_1 + \cdots + \mu_{n-1}$.

Par 9.c les spectres de M et $M_{\leqslant n-1}$ sont enlacés. Ainsi

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \lambda_{i+1} \leqslant \mu_i \leqslant \lambda_i.$$

En particulier

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_{ii} = \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} \leqslant \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1},$$

ce qui prouve l'inégalité dans le cas $s = n - 1$.

(c) Montrons par récurrence sur n la phrase : Si $M \in S_n(\mathbb{R})$ et $s \in [\![1, n]\!]$, alors $\sum_{i=1}^{s} m_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$.

Pour $n = 1$ on a $m_{11} = \lambda_1$. Le résultat est trivial.

Supposons la phrase vraie au rang $n - 1$. On considère $M \in S_n(\mathbb{R})$. Le cas $s = n$ a déjà été traité en 13.a, donc on peut supposer $s \in [\![1, n-1]\!]$. On appelle $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1}$ les valeurs propres de la sous-matrice $M' = M_{\leqslant n-1}$. On a

$$\sum_{i=1}^{s} m_{ii} = \sum_{i=1}^{s} m'_{ii}.$$

Or par hypothèse de récurrence, $\sum_{i=1}^{s} m'_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{s} \mu_i$. Enfin, comme $\mathrm{Sp}(M)$ et $\mathrm{Sp}(M')$ sont enlacés, on a en particulier $\mu_i \leqslant \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, d'où $\sum_{i=1}^{s} \mu_i \leqslant \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$. Par transitivité on obtient bien

$$\boxed{\sum_{i=1}^{s} m_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{s} \lambda_i}.$$

Quatrième partie

14. On peut observer que $\|\omega_1\| = \|\omega_2\| = 1$ et $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \frac{1}{2}$.

(a) Clairement $s_1(\omega_1) = \omega_1$. Ensuite, par définition d'une symétrie orthogonale,

$$s_1(\omega_2) = -\omega_2 + 2\frac{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle}{\langle \omega_1, \omega_1 \rangle}\omega_1 = -\omega_2 + \omega_1$$

La matrice de s_1 dans la base $\mathcal{C}$ est bien $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Clairement $s_2(\omega_2) = \omega_2$. Ensuite, par définition d'une symétrie orthogonale,

$$s_2(\omega_1) = -\omega_1 + 2\frac{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle}{\langle \omega_2, \omega_2 \rangle}\omega_2 = -\omega_1 + \omega_2$$

La matrice de s_2 dans la base $\mathcal{C}$ est bien $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

15. (a) H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, donc hérite d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel en tant que sous-espace de $\mathbb{R}^3$. La $\boxed{\text{linéarité de } \varphi}$ découle du fait que $(m_1, m_2, m_3) \mapsto m_1 - m_2$ et $(m_1, m_2, m_3) \mapsto m_2 - m_3$ sont trivialement des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ et donc sur H. Comme $\dim H = 3 - 1 = 2 = \dim E$, il suffit de montrer que φ est une application linéaire injective. Si $(m_1, m_2, m_3) \in H$ et $\varphi(m_1, m_2, m_3) = 0_{\mathbb{R}^2}$, alors

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0, \quad m_1 - m_2 = 0, \quad m_2 - m_3 = 0$$

et donc $(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 0)$. Ainsi φ est injective, et comme il y a égalité de dimensions, $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme linéaire}}$.

Notons E^+ l'ensemble $\{p_1\omega_1 + p_2\omega_2 | p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+\}$. Clairement $\boxed{\varphi(H^+) \subset E^+}$. Réciproquement, si $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+$, il existe $(m_1, m_2, m_3) \in H^+$ avec $(m_1 - m_2, m_2 - m_3) = (p_1, p_2)$. En effet il suffit de prendre

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 \\ m_2 &= -\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 \\ m_3 &= -\frac{1}{3}p_1 - \frac{2}{3}p_2. \end{cases}$$

On a donc aussi $\boxed{E^+ \subset \varphi(H^+)}$ d'où :

$\boxed{\varphi(H^+) \text{ est l'ensemble des combinaisons linéaires positives de } \omega_1, \omega_2}$.

(b) Première égalité :

$$\begin{aligned} s_1 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) &= s_1((m_1 - m_2)\omega_1 + (m_2 - m_3)\omega_2) \\ &= (m_1 - m_2)s_1(\omega_1) + (m_2 - m_3)s_1(\omega_2) \\ &= (m_1 - m_2)\omega_1 + (m_2 - m_3)(\omega_1 - \omega_2) \\ &= (m_1 - m_3)\omega_1 + (m_3 - m_2)\omega_2 \\ &= \varphi(m_1, m_3, m_2). \end{aligned}$$

Seconde égalité :

$$\begin{aligned} s_2 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) &= s_2((m_1 - m_2)\omega_1 + (m_2 - m_3)\omega_2) \\ &= (m_1 - m_2)s_2(\omega_1) + (m_2 - m_3)s_2(\omega_2) \\ &= (m_1 - m_2)(-\omega_1 + \omega_2) + (m_2 - m_3)\omega_2 \\ &= (m_2 - m_1)\omega_1 + (m_1 - m_3)\omega_2 \\ &= \varphi(m_2, m_1, m_3). \end{aligned}$$

(c) En utilisant les formules du 15.a, on voit que $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ est l'ensemble des $p_1\omega_1 + p_2\omega_2$, où

$$\begin{cases} p_1 \geqslant 0 \\ p_2 \geqslant 0 \\ \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 \leqslant \lambda_1 \\ \frac{1}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_2 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

Les trois premières inégalités définissent un triangle plein, dont les sommets A, B, C ont pour coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ (on a évidemment $\lambda_1 > 0$ car $0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 3\lambda_1$) :

$$A : (0,0), \quad B : (0, 3\lambda_1), \quad C : (\frac{3}{2}\lambda_1, 0).$$

Ensuite, comme $\lambda_1 + \lambda_2 = -\lambda_3 > 0$, on voit que A vérifie la 4ème inégalité $\frac{1}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_2 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2$, mais pas B (car $\lambda_1 > \lambda_2$). Enfin, C la vérifie car

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{2} > \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{2} = \frac{\lambda_1}{2}.$$

Ainsi la droite d'équation $\frac{1}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ coupe les segments $[A, B]$ et $[B, C]$ du triangle ABC en deux points D, E dont les coordonnées dans $\mathcal{C}$ se calculent facilement :

$$D : (0, \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad E : (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2).$$

Ceci montre que $\boxed{\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}) \text{ est le quadrilatère de sommets } A, D, E, C}$.

16. (a) Il suffit de montrer la partie «seulement si» pour toutes les permutations σ (l'autre partie s'en déduit aisément). On suppose donc qu'il existe une matrice orthogonale $U \in O_3(\mathbb{R})$ telle que

$$UMU^{-1} = \begin{bmatrix} m_1 & * & * \\ * & m_2 & * \\ * & * & m_3 \end{bmatrix}$$

On note P la matrice de permutation définie via le symbole de Kronecker par

$$P_{ij} = \delta_{\sigma(i),j}.$$

Cette matrice P est clairement orthogonale. On obtient ensuite

$$P \begin{bmatrix} m_1 & * & * \\ * & m_2 & * \\ * & * & m_3 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} m_{\sigma(1)} & * & * \\ * & m_{\sigma(2)} & * \\ * & * & m_{\sigma(3)} \end{bmatrix}$$

ou encore

$$(PU)M(PU)^{-1} = \begin{bmatrix} m_{\sigma(1)} & * & * \\ * & m_{\sigma(2)} & * \\ * & * & m_{\sigma(3)} \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{(m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, m_{\sigma(3)}) \in \mathcal{D}_M}$ puisque $PU \in O_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit $(m_1, m_2, m_3) \in H^+ \cap \mathcal{D}_M$. Alors $m_1 + m_2 + m_3 = 0, m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$ et il existe une matrice orthogonale U telle que (m_1, m_2, m_3) soit la diagonale de UMU^{-1}. Or le spectre de UMU^{-1} est celui de M, à savoir $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. La question 13, appliquée à la matrice symétrique UMU^{-1}, implique alors en particulier

$$m_1 \leqslant \lambda_1, \quad m_1 + m_2 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2.$$

D'où $\boxed{H^+ \cap \mathcal{D}_M \subset \mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}}$.

(c) Comme $(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{D}_M$, il existe une matrice orthogonale U telle que

$$UMU^{-1} = \begin{bmatrix} A & * \\ * & m_3 \end{bmatrix},$$

où A est une matrice symétrique 2×2 de diagonale (m_1, m_2).

On note V les matrices orthogonales de $O_3(\mathbb{R})$ de la forme $V = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, où $P \in O_2(\mathbb{R})$. Alors

$$(VU)M(VU)^{-1} = VUMU^{-1}V^{-1} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & * \\ * & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PAP^{-1} & * \\ * & m_3 \end{bmatrix}.$$

Donc pour tout $P \in O_2(\mathbb{R})$, on a $(\mathrm{Diag}_2(PAP^{-1}), m_3) \in \mathcal{D}_M$. On note $(\lambda_1 \geqslant \lambda_2)$ le spectre de A. On sait par la question 12 que l'ensemble des $\mathrm{Diag}_2(PAP^{-1})$, lorsque P parcourt $O_2(\mathbb{R})$, est le segment S_2 d'extrémités (λ_1, λ_2) et (λ_2, λ_1).
Donc le segment S_3 d'extrémités $(\lambda_1, \lambda_2, m_3)$ et $(\lambda_2, \lambda_1, m_3)$ est inclus dans $\mathcal{D}_M$.
Or (m_1, m_2, m_3) et (m_2, m_1, m_3) appartiennent à ce segment S_3 car (m_1, m_2) et (m_2, m_1) appartiennent à S_2.
Ainsi le segment d'extrémités $(m_1, m_2, m_3), (m_2, m_1, m_3)$ est inclus dans S_3, qui est inclus dans $\mathcal{D}_M$.
Pour la seconde partie, on utilise le même argument, en prenant cette fois les matrices V de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$ avec $P \in O_2(\mathbb{R})$.

(d) Soit $(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$.
$\boxed{\text{Premier cas : } \lambda_2 \geqslant 0}$. On pose $\mu_1 = \lambda_1$ et $\mu_2 = m_1 + m_2 - \lambda_1$. Par construction $\mu_1 \in [\lambda_2, \lambda_1]$. En outre $\mu_2 \leqslant \lambda_2$ car $m_1 + m_2 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2$. Enfin $\lambda_3 \leqslant \mu_2$ car

$$\mu_2 - \lambda_3 = m_1 + m_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = m_1 + m_2 + \lambda_2 \geqslant m_1 + m_2 = -m_3 \geqslant 0$$

L'inégalité $m_3 \leqslant 0$ se justifie par $3m_3 \leqslant m_1 + m_2 + m_3 = 0$.
Il en découle que le triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et le couple (μ_1, μ_2) sont enlacés. Grâce à 11.b il existe alors $U \in O_3(\mathbb{R})$ tel que

$$\mathrm{Sp}((UMU^{-1})_{\leqslant 2}) = (\mu_1, \mu_2).$$

Notons $A = (UMU^{-1})_{\leqslant 2}$. Comme $\mathrm{Sp}(A) = (\mu_1, \mu_2)$, $\mathcal{D}_A$ est (question 12) le segment reliant (μ_1, μ_2) à (μ_2, μ_1). D'autre part, $m_1 + m_2 = \mu_1 + \mu_2$ et $m_2 \leqslant m_1 \leqslant \lambda_1 = \mu_1$, ce qui entraîne que $(m_1, m_2) \in \mathcal{D}_A$. Alors il existe $V \in O_2(\mathbb{R})$ telle que

$$VAV^{-1} = \begin{bmatrix} m_1 & * \\ * & m_2 \end{bmatrix}.$$

Posons $W = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$. Alors

$$WUMU^{-1}W^{-1} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & * & * \\ * & m_2 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Comme M est de trace nulle, $(WU)M(WU)^{-1}$ l'est aussi, d'où $\mathrm{Diag}_3((WU)M(WU)^{-1}) = (m_1, m_2, m_3)$. La matrice WU est clairement orthogonale. D'où
$\boxed{(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{D}_M}$.
$\boxed{\text{Second cas : } \lambda_2 < 0}$. On pose $\mu_2 = \lambda_3$ et $\mu_1 = m_2 + m_3 - \lambda_3$. Par construction $\mu_2 \in [\lambda_3, \lambda_2]$. En outre $\mu_1 \geqslant \lambda_2$ car $m_1 \leqslant \lambda_1$. Enfin $\mu_1 \leqslant \lambda_1$ car

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_3 - m_2 - m_3 = m_1 - \lambda_2 > m_1 \geqslant 0.$$

L'inégalité $m_1 \geqslant 0$ se justifie par $3m_1 \geqslant m_1 + m_2 + m_3 = 0$.
Il en découle que le triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et le couple (μ_1, μ_2) sont enlacés. Grâce à 11.b il existe alors $U \in O_3(\mathbb{R})$ tel que

$$\mathrm{Sp}((UMU^{-1})_{\leqslant 2}) = (\mu_1, \mu_2).$$

Notons $A = (UMU^{-1})_{\leqslant 2}$. Comme $\mathrm{Sp}(A) = (\mu_1, \mu_2)$, $\mathcal{D}_A$ est (question 12) le segment reliant (μ_1, μ_2) à (μ_2, μ_1). D'autre part, $m_2 + m_3 = \mu_1 + \mu_2$ et $m_2 \geqslant m_3 \geqslant \lambda_3 = \mu_2$, ce qui entraîne que $(m_2, m_3) \in \mathcal{D}_A$. Alors il existe $V \in O_2(\mathbb{R})$ telle que

$$VAV^{-1} = \begin{bmatrix} m_2 & * \\ * & m_3 \end{bmatrix}.$$

Posons $W = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$. Alors

$$WUMU^{-1}W^{-1} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 & * & * \\ * & m_3 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Comme M est de trace nulle, $(WU)M(WU)^{-1}$ l'est aussi, d'où $\mathrm{Diag}_3((WU)M(WU)^{-1}) = (m_2, m_3, m_1)$. La matrice WU est clairement orthogonale. D'où $(m_2, m_3, m_1) \in \mathcal{D}_M$. Ceci entraîne par 16.a que $\boxed{(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{D}_M}$.

(e) Comme $H^+ \cap \mathcal{D}_M \subset \mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$ (16.b) et $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}} \subset \mathcal{D}_M \cap H^+$ (16.d), il vient

$$\varphi(\mathcal{D}_M \cap H^+) = \varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$$

Tout élément de $\mathcal{D}_M$ est, à permutation près, un élément de $\mathcal{D}_M \cap H^+$ (16.a).
Le groupe $\mathrm{Sym}(3)$ est engendré par les deux transpositions $(2,3)$ et $(1,2)$, qui correspondent via la bijection φ aux deux symétries axiales s_1, s_2 (15.b).
Ainsi

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathcal{D}_M) &= \varphi(\mathcal{D}_M \cap H^+) \cup s_1\left(\varphi(\mathcal{D}_M \cap H^+)\right) \cup s_2\left(\varphi(\mathcal{D}_M \cap H^+)\right) \cup \\
&\quad \cup s_1 \circ s_2\left(\varphi(\mathcal{D}_M \cap H^+)\right) \cup s_2 \circ s_1\left(\varphi(\mathcal{D}_M \cap H^+)\right) \cup s_1 \circ s_2 \circ s_1\left(\varphi(\mathcal{D}_M \cap H^+)\right) \\
&= \varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}) \cup s_1\left(\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})\right) \cup s_2\left(\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})\right) \cup \\
&\quad \cup s_1 \circ s_2\left(\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})\right) \cup s_2 \circ s_1\left(\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})\right) \cup s_1 \circ s_2 \circ s_1\left(\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})\right).
\end{aligned}$$

On sait par la question 15.c que $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ est un quadrilatère. Ainsi $\varphi(\mathcal{D}_M)$ est l'union de six quadrilatères. Celle-ci est un hexagone parce que le quadrilatère $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$, de sommets A, D, E, C (cf question 15.c), possède deux côtés perpendiculaires aux axes des symétries s_1 et s_2. Plus précisément $AD \perp DE$ et $AC \perp CE$. Vérifions-le :

$$\begin{aligned}
\langle D - A, E - D \rangle &= \langle \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_2, (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1 + (-\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2)\omega_2 \rangle \\
&= \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\left((\lambda_1 - \lambda_2)\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2)\right) \\
&= \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De même pour établir $\langle C - A, E - C \rangle = 0$.
Ainsi $\varphi(\mathcal{D}_M)$ est un hexagone dont les six sommets sont $E, s_1(E), s_2(E), s_1 \circ s_2(E), s_2 \circ s_1(E), s_1 \circ s_2 \circ s_1(E)$. Leurs coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ sont

$$\begin{aligned}
&E : (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3) \\
&s_1(E) : (\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_2) \\
&s_2(E) : (\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_3) \\
&s_1 \circ s_2(E) : (\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_1) \\
&s_2 \circ s_1(E) : (\lambda_3 - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2) \\
&s_1 \circ s_2 \circ s_1(E) : (\lambda_3 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1).
\end{aligned}$$