

Corrigé X-ENS 2019, épreuve A, filière MP

Thème : Polynômes cyclotomiques et nombres de Salem

Partie I

1. L'application $P \mapsto P(\alpha)$ de $\mathbb{Q}[X]$ dans \mathbb{C} est un morphisme d'anneaux. Son noyau $I(\alpha)$ est donc un idéal de $\mathbb{Q}[X]$. Il n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque α est algébrique.
2. Si α est de degré 1, alors son polynôme minimal, qui est unitaire et annule α , est $X - \alpha$, donc $\alpha \in \mathbb{Q}$. Si, réciproquement, $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $X - \alpha \in \mathbb{Q}[X]$ donc $\Pi_\alpha = X - \alpha$ et α est de degré 1.
3. (a) Soient $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires tels que $\Pi_\alpha = AB$. On a $A(\alpha)B(\alpha) = \Pi_\alpha(\alpha) = 0$ donc, par exemple, $A(\alpha) = 0$ d'où $A \in I(\alpha)$, c'est-à-dire $\Pi_\alpha | A$. On a donc $A = \Pi_\alpha$, ce qui montre que P est irréductible.

(b) Puisque P annule z , z est algébrique et $\Pi_z | P$. Comme $\deg(\Pi_z) \geq 1$, que P est irréductible et que ces deux polynômes sont unitaires, $P = \Pi_z$.

Remarque : une conséquence de ceci est que si w est une racine de Π_z , alors $\Pi_w = \Pi_z$.

4. (a) Soit α une racine commune de A et B . On a $\Pi_\alpha | A$ et $\Pi_\alpha | B$ donc, puisque $\deg(\Pi_\alpha) \geq 1$, A et B ne sont pas premiers entre eux.
- (b) D'une manière générale, les racines complexes d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible sont simples car $P \wedge P'$ divise P et $\deg(P \wedge P') < \deg(P)$, donc $P \wedge P' = 1$.
5. (a) Posons $\alpha = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1$. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme annulateur de α . On a :

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

d'où $q | p^n$. Puisque $p \wedge q = 1$, et donc $p^n \wedge q = 1$, cela entraîne $q = 1$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$.

- (b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P(\alpha) = 0$. Comme $\Pi_\alpha | P$, les racines de Π_α sont des entiers algébriques. Or, Π_α étant unitaire, les relations coefficients-racines et le théorème admis en introduction montrent que les coefficients de Π_α sont des entiers algébriques. Comme ce sont des rationnels, la question 5.(a) montre que ce sont des entiers : $\Pi_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$.
6. (a) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$. On a, en conjuguant, $\bar{\alpha}^2 + a\bar{\alpha} + b = 0$. Comme α n'est pas réel (car les réels de module 1 sont 1 et -1 qui ne sont pas algébriques de degré 2), α et $\bar{\alpha}$ sont les deux racines de $X^2 + aX + b$. Donc $b = \alpha\bar{\alpha} = 1$ et $a = \alpha + \bar{\alpha} = 2 \operatorname{Re}(\alpha)$. En particulier, $|a| \leq 2$. Les cas $a = -2$ et $a = 2$ conduisent à $\alpha = \pm 1$ qui est exclu. Donc $a \in \{-1, 0, 1\}$ et $\alpha \in \{i, -i, j, -j, j^2, -j^2\}$, qui sont tous des complexes de module 1.

- (b) On a $\left| \frac{3+4i}{5} \right|^2 = \frac{9+16}{25} = 1$. Par ailleurs, le polynôme $\left(X - \frac{3+4i}{5} \right) \left(X - \frac{3-4i}{5} \right) = X^2 - \frac{6}{5}X + 1$ annule $\frac{3+4i}{5}$, qui est donc algébrique. Et, puisque $\frac{3+4i}{5}$ n'est pas rationnel, $\Pi_\alpha = X^2 - \frac{6}{5}X + 1$. Comme ce polynôme n'est pas à coefficients entiers, 5b. montre que α n'est pas un entier algébrique. En particulier, ce n'est pas une racine de l'unité.

7. Notons \mathbb{U} le groupe des complexes de module 1 et \mathbb{U}_n le sous-groupe des racines n -ièmes de l'unité. L'ensemble \mathbb{P}_n n'est autre que l'ensemble des générateurs de ce groupe. Notons $s(\omega)$ l'ordre d'une racine de l'unité, c'est-à-dire l'ordre du sous-groupe de \mathbb{U} qu'elle engendre. On sait que :

— Si $d|n$, alors $\mathbb{U}_d \subset \mathbb{U}_n$

— si $\omega \in \mathbb{U}_n$, alors $s(\omega)$ divise n .

Donc $\{\omega \in \mathbb{U}_n; s(\omega) = d\} = \mathbb{P}_d$ et

$$\mathbb{U}_n = \bigcup_{d|n} \{\omega \in \mathbb{U}_n; s(\omega) = d\} = \bigcup_{d|n} \mathbb{P}_d$$

et cette réunion est disjointe. On en déduit immédiatement :

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$$

8. (a) Soit $k \geq 1$. Les diviseurs de p^k sont les p^j , $1 \leq j \leq k$. Donc

$$\begin{cases} X^{p^k} - 1 = \prod_{j=1}^k \Phi_{p^j} \\ X^{p^{k-1}} - 1 = \prod_{j=1}^{k-1} \Phi_{p^j} \end{cases}$$

D'où :

$$\Phi_{p^k} = \frac{X^{p^k} - 1}{X^{p^{k-1}} - 1} = X^{(p-1)p^{k-1}} + X^{(p-2)p^{k-1}} + \dots + X^{p^{k-1}} + 1$$

(b) On trouve aisément : $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_2 = X + 1$, $\Phi_3 = X^2 + X + 1$, $\Phi_4 = X^2 + 1$, $\Phi_5 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, et $\Phi_6 = X^2 - X + 1$.

9. (a) On a $\Phi_1 = X - 1$ donc $\Phi_1(0) = -1$. Par ailleurs on déduit de 7. que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{d|n} \Phi_d(0) = -1$. On en déduit immédiatement, par récurrence forte sur $n \geq 1$, que :

$$\Phi_n(0) = 1 \text{ si } n \geq 2, \quad \Phi_n(0) = -1 \text{ si } n = 1.$$

(b) On a d'abord $\Phi_1(1) = 0$. Et, si n est de la forme p^k , p premier, $k \geq 1$, alors 8a. montre que $\Phi_{p^k} = p$. Par ailleurs, si n est de la forme $p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, où $s \geq 2$, les p_i sont des nombres premiers distincts et $k_i \geq 1$, on déduit de 7b. après simplification par $X - 1 = \Phi_1$:

$$n = \prod_{d|n, d \neq 1} \Phi_d(1)$$

d'où, en utilisant $\Phi_{p_j^{k_j}}(1) = p_j$

$$1 = \prod_{d|n, \rho(d) \geq 2} \Phi(d)$$

où l'on note $\rho(d)$ le nombre de diviseurs premiers de n (avec la convention usuelle que le produit vaut 1 si aucun diviseur d de n ne vérifie $\rho(d) \geq 2$). On en déduit immédiatement par récurrence forte sur $n \geq 2$ que :

$$\Phi_n(1) = p \text{ si } n \text{ est de la forme } p^k, \quad \Phi_n(1) = 1 \text{ sinon}$$

10. On a $X^n - 1 = \Phi_n \prod_{d|n, d < n} \Phi_d$. Donc Φ_n est le quotient (dans $\mathbb{Q}[X]$) dans la division euclidienne de $X^n - 1$ par $\prod_{d|n, d < n} \Phi_d$. Or l'algorithme usuel de la division euclidienne atteste que le quotient d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ par un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ est encore un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$. Une récurrence forte sur $d|n$ montre alors que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

11. (a) On a $|a_k| \leq n$ pour tout k , donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_k a_k z^k$ est au moins 1. En particulier, elle converge pour tout z tel que $|z| < 1$.

(b) Rappelons d'abord que la dérivée logarithmique d'un polynôme non nul Q , définie par $D(Q) = \frac{Q'}{Q}$, a la propriété $D(Q_1 Q_2) = D(Q_1) + D(Q_2)$. Donc $D(P) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - z_k}$. On a maintenant (l'inversion des deux Σ vient de ce que chaque série $\sum_{k=0}^{\infty} z_j^k z^k$ est convergente et que la seconde somme est finie) :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n z_j^k z^k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} z_j^k z^k = \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 - z_j z} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{1}{z} - z_j} = \frac{1}{z} \frac{P'(1/z)}{P(1/z)}, \end{aligned}$$

d'où la relation cherchée.

(c) On a, pour z dans le disque unité ouvert privé de 0, $z^n P(1/z) f(z) = z^{n-1} P'(1/z)$. Donc la fonction $z \mapsto z^n P(1/z) f(z)$, définie sur le disque unité ouvert, produit d'une fonction polynomiale par la somme d'une série entière, est somme d'une série entière, laquelle vaut $z^{n-1} P'(1/z)$ (y compris pour $z = 0$ par continuité de la somme d'une série entière) : elle est donc à coefficients entiers. Posons $P = X^n + b_1 X^{n-1} + \dots + b_{n-1} X + b_n$. On a $X^n P(1/X) = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + 1$. Donc les coefficients de la série entière de somme $z^n P(1/z) f(z)$ valent :

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_1 + a_0 b_1 \in \mathbb{Z} \\ a_2 + a_1 b_1 + a_0 b_2 \in \mathbb{Z} \\ \dots \end{cases}$$

et une récurrence immédiate montre que les a_k sont entiers.

12. (a) On a, vu ce qui précède, $a_k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ pour tout k et, par conséquent, $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}) \in \llbracket -n, n \rrbracket^{n+1}$. L'application $k \mapsto (a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n})$ de \mathbb{N} dans $\llbracket -n, n \rrbracket^{n+1}$ ne peut donc pas être injective et il existe k, ℓ tels que $0 \leq k < \ell$ et

$$(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}) = (a_\ell, a_{\ell+1}, \dots, a_{\ell+n}).$$

(b) Par linéarité, il suffit de vérifier l'égalité lorsque F est un polynôme de la forme X^s . Or

$$\sum_{i=1}^n z_i^s (z_i^\ell - z_i^k) = \sum_{i=1}^n z_i^{s+\ell} - \sum_{i=1}^n z_i^{s+k} = a_{s+\ell} - a_{s+k} = 0$$

(c) Comme P est irréductible, $P \wedge P'$, qui est un diviseur strict de P , vaut 1. Donc les racines complexes de P sont distinctes (rappelons que le pgcd de deux polynômes à coefficients

dans \mathbb{Q} est le même, que l'on voit ces polynômes comme éléments de $\mathbb{Q}[X]$ ou de $\mathbb{C}[X]$. Les relations obtenues dans **12b.** pour $F = X^s$ donnent, en prenant $s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^\ell - z_1^k \\ z_2^\ell - z_2^k \\ \vdots \\ z_n^\ell - z_n^k \end{pmatrix} = 0$$

Comme les z_i sont deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde est inversible d'où, pour tout i , $z_i^\ell = z_i^k$. Notons qu'on aurait pu, depuis **12a.**, faire courir i dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ plutôt que $\llbracket 0, n \rrbracket$.

13. (a) Il est bien connu que, pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $\binom{p}{k}$ est un multiple de p . Cette propriété, et la formule du binôme, montrent l'existence de H .
- (b) Puisque $z \in \mathbb{U}_n$, z est un entier algébrique. Donc, par **5b.**, $\Pi_z \in \mathbb{Z}[X]$. Posons $\Pi_z = X^s + b_{s-1}X^{s-1} + \dots + b_1X + b_0$. On a, en utilisant **13a.** étendu à la somme d'un nombre quelconque de polynômes (récurrence immédiate), l'existence d'un polynôme $G \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\Pi_z(X)^p = X^{sp} + b_{s-1}^p X^{p(s-1)} + \dots + b_1^p X^p + b_0^p + pG(X)$$

Or, par le petit théorème de Fermat, $b_k^p \equiv b_k \pmod{p}$. Donc il existe $F \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\Pi_z(X)^p = \Pi_z(X^p) + pF(X)$$

- (c) La dernière relation entraîne :

$$\Pi_z(z^p) = pF(z)$$

Et, puisque l'ensemble des entiers algébriques est un anneau, $\frac{\Pi_z(z^p)}{p} = F(z)$ est un entier algébrique.

14. (a) On a

$$\prod_{i=1}^n P'(z_i) = \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (z_i - z_j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2,$$

et, par ailleurs

$$\prod_{i=1}^n P'(z_i) = \prod_{i=1}^n n z_i^{n-1} = n^n \left(\prod_{i=1}^n z_i \right)^{n-1} = \left((-1)^{(n+1)} \right)^{n-1} n^n = (-1)^{n^2-1} n^n = (-1)^{n-1} n^n.$$

On en déduit

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1} n^n$$

- (b) Les racines de Π_z sont bien sûr des éléments de \mathbb{U}_n et elles sont distinctes (**4b.**). Posons $I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket; \Pi_z(z_i) = 0\}$. Supposons $\Pi_z(z^p) \neq 0$. Alors, puisque $z^p \in \mathbb{U}_n$, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I$ tel que $z^p = z_k$. Il vient $\Pi_z(z^p) = \prod_{i \in I} (z_k - z_i)$. Or ce produit peut être isolé dans le produit étudié dans la question précédente :

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 = v \Pi_z(z^p)$$

où v , qui est un produit de termes de la forme $(z_j - z_i)$, tous entiers algébriques, est un entier algébrique (via le théorème admis). Il vient $n^n = u \Pi_z(z^p)$, où $u = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1} v$ est

un entier algébrique. Comme l'ensemble des entiers algébriques est un anneau (théorème admis), $\frac{n^n}{p} = u \times \frac{\Pi_z(z^p)}{p}$ est un entier algébrique. Comme $\frac{n^n}{p}$ est un rationnel, **5a.** montre que c'est un entier, ce qui est absurde puisque p est un nombre premier qui ne divise pas n . On a prouvé $\Pi_z(z^p) = 0$.

- (c) Soit w un élément de \mathbb{P}_n qui est aussi racine de Π_z . On a $\Pi_z = \Pi_w$ d'après **3b.** donc, par **14b.** appliqué à w , $\Pi_z(w^p) = \Pi_w(w^p) = 0$. En outre, w^p est encore élément de \mathbb{P}_n puisque, on le sait, l'ordre de w^p dans \mathbb{U}_n vaut $\frac{n}{n \wedge p} = n$. On en déduit aisément que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ premier avec n , $\Pi_z(z^k) = 0$. Comme $\mathbb{P}_n = \{z^k, k \wedge n = 1\}$, il vient $\Phi_n | \Pi_z$ d'où, puisque Π_z est irréductible et que ces deux polynômes sont unitaires, $\Phi_n = \Pi_z$.

15. (a) C'est un calcul immédiat.

- (b) Puisque P est unitaire et réciproque, son coefficient constant vaut 1 et 0 n'est pas racine de $P : x \neq 0$. Soit s l'ordre de x en tant que racine de P . Posons $P = (X - x)^s Q$, où $Q(x) \neq 0$. On a $P = X^d P(1/X) = X^s \left(\frac{1}{X} - x \right)^s X^{d-s} Q(1/X) = (1 - xX)^s X^{d-s} Q(1/X)$. Comme $1/x$ n'est pas racine de $Q(1/X)$, $1/x$ est racine d'ordre s de P .

16. Comme $\Pi_x \in \mathbb{Q}[X]$, $\frac{1}{x} = \bar{x}$ est racine de Π_x . Puisque $x \notin \{-1, 1\}$, $1/x$ est distinct de x . C'est donc un conjugué de x . On a donc, par **3a.**, $\Pi_{1/x} = \Pi_x$. Or, en notant d le degré de Π_x , $X^d \Pi_x(1/X)$ est un polynôme de degré d qui annule $1/x$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{Q}^*$ tel que $X^d \Pi_x(1/X) = \lambda \Pi_{1/x} = \Pi_x$. Ceci montre que l'ensemble Z des racines de Π_x est stable par $z \mapsto z^{-1}$. Comme 1 et -1 ne sont pas racines de Π_x (car leur polynôme minimal vaut $X - 1$ et $X + 1$ respectivement, tandis que toute racine de Π_x a Π_x pour polynôme minimal), on a $\prod_{z \in Z} z = 1$. Les racines de Π_x étant simples, il vient que $\deg(\Pi_x)$ est pair et $\Pi_x(0) = 1$. Ceci montre que $X^d \Pi_x(1/X)$ est unitaire, donc $\lambda = 1$. Par conséquent, Π_x est réciproque.

17. (a) On a $\gamma \notin \{-1, 1\}$ car -1 et 1 sont algébrique de degré 1, tandis que γ est algébrique de degré 2 (car $\Pi_\gamma = \Pi_\alpha$). Par **16.**, $\Pi_\alpha = \Pi_\gamma$ est réciproque.

- (b) Si γ était une racine de l'unité, donc une racine de $X^m - 1$ pour une certain m , on aurait $\Pi_\gamma | X^m - 1$. Donc α serait une racine de l'unité et, puisque $\alpha \in \mathbb{R}$, α appartiendrait à $\{-1, 1\}$. Donc γ n'est pas une racine de l'unité.

- (c) Si β est une racine de Π_α de module différent de 1, alors β ou $1/\beta$ est de module strictement supérieur à 1. Comme Π_α est réciproque, ce sont deux racines de Π_α . Or, par définition de \mathcal{S} , α est l'unique racine de Π_α de module strictement supérieur à 1. Donc $\beta = \alpha$ ou $\beta = \frac{1}{\alpha}$. On en déduit que tous les conjugués de α autres que $1/\alpha$ sont de module 1.

18. Si $\alpha \in \mathcal{S}$ est de degré impair, alors Π_α , dont toutes les racines sont distinctes (**4b.**), admet un nombre impair de racines. Comme toutes les racines autres que α et $1/\alpha$ sont de module 1, Π_α admet 1 ou -1 pour racine, ce qui est absurde (le degré de Π_α est au moins 2). Donc α est de degré pair. Si ce degré valait 2, on aurait $C(\alpha) = \{1/\alpha\}$, ce qui contredit la définition de \mathcal{S} . Donc le degré de α est pair, au moins égal à 4.

19. Si P_n admet une racine $z \in \mathbb{Q}$, alors z est un entier algébrique rationnel, donc, par **5a.**, $z \in \mathbb{Z}$. La relation $z(-z^3 + (6+n)z^2 - (10+n)z + (6+n)) = 1$ montre que z est inversible dans \mathbb{Z} , donc $z = \pm 1$. Or $P_n(1) = -n \neq 0$ et $P_n(-1) = 24 + 3n \neq 0$, donc P_n n'admet aucune racine rationnelle. Par ailleurs, puisque $P_n(1) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que P_n admet une racine dans $]1, +\infty[$.

20. Comme P_n est un polynôme réciproque, cela résulte de **15b.**

21. On a

$$\frac{1}{X^2}[X^4 - (6+n)X^3 + (10+n)X^2 - (6+n)X + 1] = \left(X + \frac{1}{X}\right)^2 - (6+n)\left(X + \frac{1}{X}\right) + (8+n)$$

Donc s_n et t_n sont racines de $Y^2 - (6+n)Y + (8+n)$. Si $s_n \neq t_n$, ce sont les deux racines et l'on a

$$s_n + t_n = 6 + n \text{ et } s_n t_n = (8 + n).$$

Ce résultat subsiste si $s_n = t_n$ car on a, dans ce cas, $\gamma_n = \alpha_n$ ou $\gamma_n = \frac{1}{\alpha_n}$:

$$X^4 - (6+n)X^3 + (10+n)X^2 - (6+n)X + 1 = (X - \alpha_n)^2 \left(X - \frac{1}{\alpha_n}\right)^2 = \left(X^2 - \left(\alpha_n + \frac{1}{\alpha_n}\right)X + 1\right)^2,$$

d'où

$$\frac{1}{X^2}[X^4 - (6+n)X^3 + (10+n)X^2 - (6+n)X + 1] = \left(\left(X + \frac{1}{X}\right) - \left(\alpha_n + \frac{1}{\alpha_n}\right)\right)^2$$

qui montre que $s_n = t_n$ est racine double de $Y^2 - (6+n)Y + (8+n)$.

22. Puisque α_n est réel, il en est de même de $t_n = \alpha_n + \frac{1}{\alpha_n}$ et de $s_n = 6 + n - t_n$. En outre, le polynôme $Q(Y) = Y^2 - (6+n)Y + (8+n)$ vérifie $Q(0) > 0$ et $Q(2) = -n < 0$. Donc Q admet une racine dans $]0, 2[$. Il ne peut s'agir de $t_n = \alpha_n + \frac{1}{\alpha_n}$ car $x + \frac{1}{x} > 2$ pour tout $x > 1$. Donc $s_n \in]0, 2[$.

Comme $x + \frac{1}{x}$ n'appartient jamais à $]0, 2[$ lorsque x est réel, on en déduit $\gamma_n \notin \mathbb{R}$. En outre, γ_n et $\frac{1}{\gamma_n}$ sont les deux racines du polynôme $X^2 - s_n X + 1 = 0$. Comme les coefficients de celui-ci sont réels, $\frac{1}{\gamma_n} = \overline{\gamma_n}$, d'où $|\gamma_n| = 1$.

23. (a) Les nombres s_n et t_n sont les racines de $Y^2 - (6+n)Y - (8+n)$. Ce sont donc des entiers algébriques. S'ils sont rationnels (ils le sont soit tous les deux, soit ni l'un ni l'autre puisque $s_n + t_n = 6 + n$), ce sont des entiers relatifs d'après **5a**. d'où, puisque $s_n \in]0, 2[$, $s_n = 1$. C'est absurde puisque 1 n'est manifestement pas racine de $Y^2 - (6+n)Y - (8+n)$.

(b) Supposons P_n non irréductible et posons $P_n = AB$, où $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ sont unitaires. Si on avait, par exemple, $\deg(A) = 1$, alors P_n admettrait une racine rationnelle et s_n ou t_n serait rationnel. On a donc $\deg(A) = \deg(B) = 2$. Les racines de A sont toutes les deux réelles ou tous les deux non réelles. Donc, quitte à échanger les noms de A et B : $A = (X - \alpha_n)\left(X - \frac{1}{\alpha_n}\right)$ d'où $t_n = \alpha_n + \frac{1}{\alpha_n} \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit **23a**. Donc P_n est irréductible. Puisque $|\gamma_n| = |1/\gamma_n| = 1$, on a montré $\alpha_n \in \mathcal{S}$.

(c) On a $\alpha_n^4 - 6\alpha_n^3 + 10\alpha_n^2 - 6\alpha_n + 1 = n\alpha_n(\alpha_n^2 - \alpha_n + 1)$. Comme $x(x^2 - x + 1) \geq 1$ pour tout $x \geq 1$ (la dérivée de $x^2 - x + 1$ est positive sur $[1, +\infty[$), on a $\alpha_n^4 - 6\alpha_n^3 + 10\alpha_n^2 - 6\alpha_n + 1 \geq n$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^4 - 6\alpha_n^3 + 10\alpha_n^2 - 6\alpha_n + 1 = +\infty$. Or, si $(\alpha_n)_n$, qui est positive, ne divergeait pas vers $+\infty$, elle admettrait une sous-suite bornée, et la sous-suite correspondante de $(\alpha_n^4 - 6\alpha_n^3 + 10\alpha_n^2 - 6\alpha_n + 1)_n$ serait elle-même bornée. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.

24. Soit α un élément de \mathcal{T} . Posons $\Pi_\alpha = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$ (on sait que Π_α est un polynôme réciproque). Notons $\alpha, \frac{1}{\alpha}, \gamma, \frac{1}{\gamma}$ ses racines (où γ est de module 1). Les relations coefficients

racines donnent :

$$\begin{cases} a = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \\ b = 2 + \alpha\gamma + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \end{cases}$$

d'où $|a| \leq |\alpha| + 3$ et $|b| \leq 2|\alpha| + 4$. Ceci montre que, pour tout $M > 1$, l'ensemble d'éléments de \mathcal{T} dans $]1, M]$ est fini, puisque, si α est un tel nombre, $|a| \leq M + 3$ et $|b| \leq 2M + 4$. En particulier, en choisissant M tel que $]1, M]$ contienne un élément de \mathcal{T} (c'est possible d'après ce qui précède), on voit que \mathcal{T} possède un plus petit élément.

Déterminons celui-ci. Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$ un polynôme réciproque de degré 4. Cherchons à quelles conditions l'une de ses racines est élément de \mathcal{T} . D'après la **partie 3**, P doit admettre une racine $\alpha > 1$ et une racine γ de module 1 non réelle (car non racine de l'unité), les autres racines étant $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\gamma}$. Supposons que tel soit le cas et posons $t = \alpha + \frac{1}{\alpha}$, $s = \gamma + \frac{1}{\gamma}$. Alors s et t sont les racines du polynôme $Q(Y) = Y^2 + aY + (b - 2)$ et l'on a $t > 2$ et $-2 < s < 2$. Si, réciproquement, le polynôme $Q(Y) = Y^2 + aY + (b - 2)$ admet deux racines réelles s et t vérifiant $t > 2$ et $-2 < s < 2$, alors les racines de P sont les racines des polynômes $X^2 - tX + 1$ et $X^2 - sX + 1$, qu'on peut écrire $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ pour le premier et $\gamma, \frac{1}{\gamma}$ pour le second, avec $\alpha > 1$ et $|\gamma| = 1$, γ non réel. En outre, dans ces conditions, P est irréductible si et seulement si s et/ou t est/sont irrationnels (comme $s + t$ est rationnel, ils le sont simultanément).

En résumé, P définit un élément de \mathcal{T} si et seulement si $Q(Y) = Y^2 + aY + (b - 2)$ admet deux racines réelles irrationnelles s et t vérifiant $t > 2$ et $-2 < s < 2$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, que $Q(Y) = Y^2 + aY + (b - 2)$ admette deux racines réelles s et t vérifiant $t > 2$ et $-2 < s < 2$ équivaut à $Q(-2) > 0$ et $Q(2) < 0$, soit

$$\begin{cases} 2a - b - 2 < 0 \\ 2a + b + 2 < 0 \end{cases}$$

Déterminons maintenant le couple (a, b) (on verra qu'il n'y en a qu'un) vérifiant les deux inégalités de ce système pour lequel α est minimal (sans exiger a priori $\alpha \in \mathcal{T}$). Ainsi qu'on le constatera, t est irrationnel pour ce couple de valeurs, pour lequel on a aura donc $\alpha = \min(\mathcal{T})$. En sommant les inégalités, on a $a < 0$ (donc $a \leq -1$ puisque c'est un entier).

Par ailleurs, puisque $x \mapsto x + 1/x$ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, α est minimal lorsque t est maximal.

Or $t = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(b - 2)}}{2}$ et, pour a fixé, l'application $b \mapsto \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(b - 2)}}{2}$ est décroissante. Donc, à $a \leq -1$ fixé, la valeur maximale de $t(a, \cdot)$ est obtenue pour la valeur maximale de b vérifiant les deux inégalités, soit $b = -2a - 3$, et elle vaut

$$\tau(a) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8a + 20}}{2}$$

Or cette fonction de a est une fonction décroissante. Sa valeur maximale est donc obtenue pour $a = -1$. Ainsi, la valeur maximale de t est obtenue pour $a = -1$ et $b = -1$. Comme $t = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ est irrationnel, ce couple fournit la valeur minimale de $\alpha \in \mathcal{T}$:

$$\alpha = \frac{\frac{1 + \sqrt{13}}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 4}}{2} \simeq 1,722084$$