X-ENS MP 2022
Corrigé de Mathématiques A

m.laamoum@gmail.com

- PARTIE I -

Soient V et V' deux sous espaccs de E de dimension $p \geqslant 1$.

(1) (a) L'ensemble $A = \{(a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1\} = S_V(0,1) \times S_{V'}(0,1)$ le produit des deux sphères unité de V et V', c'est un fermé borné donc compact de $E \times E$, muni de la topologie produit, de plus l'application $\varphi : (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est bilinéaire en dimensions finies donc elle est continue et elle est bornée sur A et atteint ses bornes , d'où l'existence de $u_1 \in V$ et $u_1' \in V'$ de norme 1 tels que

$$\langle u_1, u_1'\rangle = \sup \{\langle a, a'\rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1\}$$

(b) Le cas $k = 1$ est démontré dans la question (a) , supposons le résultat pour $2 \leq k \ \leq p - 1$,on a donc une famille $u = (u_1, \ldots, u_k)$ de vecteurs de V et une famille $u' = (u_1', \ldots, u_k')$ de vecteurs de V' telles que u et u' soient orthonormées et vérifient les deux conditions i) et ii)
L'ensemble $B = \Big(S_V(0,1) \cap [Vect(\{u_1, \ldots, u_k\})]^{\perp}\Big) \times \Big(S_{V'}(0,1) \cap [Vect(\{u_1', \ldots, u_k'\})]^{\perp}\Big)$ est un compact non vide de $E \times E$, φ est bornée sur B et atteint ses bornes , donc ils existent $u_{k+1} \in V$ et $u_{k+1}' \in V'$ de norme 1 et vérifient les deux conditions i) et ii) . Ce qui prouve le résultat pour $k + 1$.
Si $k = p$ alors B est vide et le procédé s'arrête . Ainsi on a prouvé le résultat.

(2) Supposons $\dim (V \cap V') \geqslant 1$, soit $(e_1, .., e_r)$ une base orthonormée $V \cap V'$, on prend $u_k = u_k' \ = e_k$, ils vérifient i) et ii) , car $\langle u_k, u_k' \ \rangle \ = 1$ et pour tout $(a, a') \in V \cap V', \|a\| = \|a'\| = 1$, par l'inégalité de Cauchy Schwartz on a $|\langle a, a'\rangle| \leqslant 1$. Réciproquement si $(a, a') \in V \cap V', \|a\| = \|a'\| = 1$ et $\langle a, a'\rangle = 1$, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwartz donc ils sont colinéaires, par suite ils sont égaux .

(3) (a) u a p éléments et elle est orthonormée, donc libre, ainsi u est une base orthonormée de V.

(b) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Posons $u_k(t) = \dfrac{u_k + tu_\ell}{\|u_k + tu_\ell\|}$ pour $\ell \in [\![k+1, p]\!]$ et tous $t \in \mathbb{R}$, elle est bien définie car u_k et u_ℓ sont non colinéaires. Elle est de plus $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^1$.
De plus, comme (u_k, u_ℓ) est orthonormée, on a $\|u_k + tu_\ell\| = \sqrt{1 + t^2}$.
On pose $g : t \longmapsto \langle u_k(t), u_k'\rangle$, remarque que $\forall t \in \mathbb{R}, \|u_k(t)\| = 1$,$u_k(0) = u_k$ et si $r \leqslant k-1$, alors $\langle u_r, u_k(t)\rangle = 0$.
Ainsi g admet un maximum en $t = 0$ et $g'(0) = 0$. On a $g'(t) = \left\langle \dfrac{d}{dt} u_k(t), u_k' \right\rangle$, de plus

$$\frac{d}{dt} u_k(t) = -\frac{t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} u_k + \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} u_\ell \ \text{ et } \ \frac{d}{dt} u_k(0) = u_\ell$$

donc $g'(0) = \langle u_\ell, u_k'\rangle = 0$, ce qui donne $u_k' \in \operatorname{Vect} (u_{k+1}, \ldots, u_p)^{\perp}$.

(c) Soit k dans $[\![1, p-]\!]$, d'après (a) et (b) on a

$$u_{k+1} \in \operatorname{Vect} (u_1, \ldots, u_k)^{\perp} \cap \operatorname{Vect} (u_1', \ldots, u_k')^{\perp} = (\operatorname{Vect} (u_1, \ldots, u_k) + \operatorname{Vect} (u_1', \ldots, u_k'))^{\perp}$$

(d) Soit $k, h \in [\![1, p]\!]$, avec $k < h$; on a

$$\operatorname{Vect} (u_k, u_k') \subset \operatorname{Vect} (u_1, \ldots, u_{h-1}) + \operatorname{Vect} \left(u_1', \ldots, u_{h-1}'\right)$$

donc

$$u_h \in \left(\operatorname{Vect} (u_1, \ldots, u_{h-1}) + \operatorname{Vect} \left(u_1', \ldots, u_{h-1}'\right)\right)^{\perp} \subset \operatorname{Vect} (u_k, u_k')^{\perp}$$

Les familles u et u' jouent un rôle symétrique , donc

$$u_h' \in \left(\operatorname{Vect} (u_1, \ldots, u_{h-1}) + \operatorname{Vect} \left(u_1', \ldots, u_{h-1}'\right)\right)^{\perp} \subset \operatorname{Vect} (u_k, u_k')^{\perp}$$

d'où V_k et V_h sont orthogonaux.

(4) (a) On a pour tout $k \in [\![1, p]\!]$

$$|\langle u_k, u_k' \rangle| \leq \|u_k\| . \|u_k'\| = 1$$

donc il existe θ_k telle que $\cos(\theta_k) = \langle u_k, u_k' \rangle$; la relation ii) de la question 1 montre que la suite

$$(\langle u_k, u_k' \rangle)_{1 \leq k \leq p} = (\cos(\theta_k))_{1 \leq k \leq p}$$

est croissante et positive les θ_k sont toutes dans $[0, \pi/2]$ ou dans $[-\pi/2, 0]$, cos est paire , on prend donc les θ_k dans $[0, \pi/2]$ et elles vérifient donc $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_p \leqslant \pi/2$.

(b) On a si $i \neq j$ alors $\langle u_i, u_j' \rangle = 0$ donc la matrice $\mathrm{Gram}(u, u')$ est diagonale et

$$\det(\mathrm{Gram}(u, u')) = \prod_{k=1}^{p} \langle u_k, u_k' \rangle = \prod_{k=1}^{p} \cos(\theta_k)$$

(c) On a

$$\det(\mathrm{Gram}(u, u')) = \prod_{k=1}^{p} \cos(\theta_k) \text{ et } 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_p \leqslant \pi/2$$

donc $\det(\mathrm{Gram}(u, u')) \leqslant 1$.

On a égalité si et seulement si $\theta_1 = \cdots = \theta_p = 0$, ce qui donne pour tout

$$k \in [\![1, p]\!] \ , \ \langle u_k, u_k' \rangle = \|u_k\| . \|u_k'\| = 1$$

ce qui donne $u_k = u_k'$, par suite $V = V'$.

- PARTIE II -

(5) (a) On vérifie que le déterminant est alterné . Soit $\varphi \in \mathfrak{S}_n$:

$$\left[x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(p)}\right] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma \circ \varphi(i), i} = \prod_{\sigma'' = \sigma' \circ \sigma} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma'') \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma''(i), i} = \varepsilon(\sigma) [x_1, \ldots, x_p]$$

l'application $\sigma \mapsto \sigma \circ \varphi$ est une bijection sur $\mathfrak{S}_p$ d'application réciproque $\sigma \mapsto \sigma \circ \varphi^{-1}$ donc

$$\begin{aligned}
\left[x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(p)}\right] &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon\left(\sigma \circ \varphi^{-1}\right) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i), i} \\
&= \varepsilon\left(\varphi^{-1}\right) [x_1, \ldots, x] \\
&= \varepsilon(\varphi) [x_1, \ldots, x]
\end{aligned}$$

Ainsi l'application $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto [x_1, \ldots, x_p]$ appartient à $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

(b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\begin{aligned}
g\left(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(p)}\right) &= \left[f\left(u_{\sigma(1)}\right), \ldots, f\left(u_{\sigma(p)}\right)\right] \\
&= \varepsilon(\sigma) [f(u_1), \ldots, f(u_p)]
\end{aligned}$$

donc $g \in \mathcal{A}_p(F, \mathbb{R})$.

(6) (a) Soit $e \in E^p$, on remarque que

$$\Omega_p(e)(u) = [f_e(u_1), \ldots, f_e(u_p)] \qquad \text{avec} \qquad f_e : x \in E \longmapsto (\langle e_1, x \rangle, \ldots, \langle e_p, x \rangle) \in \mathbb{R}^p \ .$$

Par la question précédente, on a bien $\Omega_p(e) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(b) Soit $(e,u)\in E^p\times E^p$, la matrice de Gram est symétrique, par symétrie du produit scalaire on a

$$\begin{aligned}\Omega(e)(u) &= \det(\mathrm{Gram}(e,u)\\ &= \det(\mathrm{Gram}(u,e))\\ &= \Omega(u)(e)\end{aligned}$$

(c) Si $\sigma\in\mathcal{S}_n$, on a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}\Omega(e\cdot\sigma)(u) &= \Omega_p(u)(e\cdot\sigma)\\ &= \varepsilon(\sigma)\Omega_p(u)(e) \quad (\ \Omega_p(u) \text{ est alternée })\\ &= \varepsilon(\sigma)\Omega_p(e)(u)\end{aligned}$$

d'où $\Omega_p\in\mathcal{A}\left(E,\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})\right)$.

(7) (a) Soient $M\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), e=(e_1,\ldots,e_p)$ et $e'=\left(e'_1,\ldots,e'_p\right)$ dans E^p vérifiant $e'_i=\sum\limits_{j=1}^{p}M_{i,j}e_j$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$.

Pour tout u dans E^p on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Gram}(e',u) &= \left(\langle e'_i,u_j\rangle\right)_{i,j}\\ &= \left(\left\langle\sum_{k=1}^{p}M_{i,k}e_k,u_j\right\rangle\right)_{i,j.}\\ &= \left(\sum_{k=1}^{p}M_{i,k}\left\langle e_k,u_j\right\rangle\right)_{i,j.}\\ &= \left(M.\,\mathrm{Gram}(e,u)\right)_{i,j.}\\ &= M.\,\mathrm{Gram}(e,u)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Omega_p(e')(u) &= \det(\mathrm{Gram}(e',u))\\ &= \det(M.\,\mathrm{Gram}(e,u))\\ &= \det\left(M\right).\det\left(\mathrm{Gram}(e,u)\right)\end{aligned}$$

Ainsi $\Omega_p\left(e'\right)=\det(M)\Omega_p(e)$.

(b) Soit $e\in E^p$ une famille liée, il existe un e_i qui est combinaison de $(e_k)_{\substack{1\le k\le p\\ k\neq i}}$, par linéarité du produit scalaire la ieme colonne $\mathrm{Gram}(e,e)$ est combinaison des autres colonnes, donc $\Omega_p(e)=0$.

Réciproquement si $\Omega_p(e)=0$, alors il esiste un vecteur non nul $X=\ {}^t(x_1,..,x_p)$ tel que $\mathrm{Gram}(e,e)X=0$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Gram}(e,e)X &= {}^t(\sum_{j=1}^{p}\left\langle e_1,e_jx_j\right\rangle,..,\sum_{j=1}^{p}\left\langle e_p,e_jx_j\right\rangle)\\ &= {}^t\left(\left\langle e_1,\sum_{j=1}^{p}e_jx_j\right\rangle,..,\left\langle e_p,\sum_{j=1}^{p}e_jx_j\right\rangle\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}{}^tX\,\mathrm{Gram}(e,e)X &= \sum_{i=1}^{p}x_i\left\langle e_i,\sum_{j=1}^{p}e_jx_j\right\rangle\\ &= \left\|\sum_{j=1}^{p}e_jx_j\right\|^2 \qquad (*)\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}e_jx_j=0$ et $(x_1,..,x_p)\neq(0,..,0)$ donc e est liée.

Ainsi $\Omega_p(e)\neq 0$ si et seulement si e est une famille libre.

(c) $\text{Gram}(e,e)$ est symétrique réelle donc diagonalisable , si λ une valeur propre de $\text{Gram}(e,e)$ et $X = {}^t(x_1,..,x_p)$ un vecteur propre associé, la relation (*) donne

$$\begin{aligned} {}^tX\,\text{Gram}(e,e)X &= \lambda.{}^tX.X \\ &= \lambda.\left\|X\right\|^2 \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{p} e_j x_j\right\|^2 \end{aligned}$$

$X \neq 0$, donc $\lambda \geq 0$ âr suite $\Omega_p(e)(e) = \prod\limits_{\lambda\in Sp(\text{Gram}(e,e))} \lambda \geqslant 0$.

(8) (a) Si $b = (b_1, \ldots, b_p)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E, alors $\text{Gram}(e,e) = I_p$ donc $\text{vol}_p(b) = 1$.

(b) On suppose $p \geqslant 2$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_p) \in E^p$. On a pr la projection orthogonale sur **l'orthogonal** de l'espace engendré par la famille $e_2^p = (e_2, \ldots, e_p)$ donc

$$e_1 - \text{pr}\,(e_1) = \sum_{j=2}^{p} \alpha_j e_j \in \mathit{vect}\,(e_2, \ldots, e_p)$$

posons $e' = (\text{pr}\,(e_1)\,, e_2 \ldots, e_p)$ et $\text{Gram}(e,e) = (C_1|C_2|...|C_p)$, alors par bilinéarité du produit scalaire on a $\text{Gram}(e',e') = (C_1 - \sum\limits_{j=2}^{p} \alpha_j C_j|C_2|...|C_p)$ ainsi $\Omega_p(e')(e') = \Omega_p(e)(e)$.

Comme $\text{pr}\,(e_1) \in (e_2^p)^{\perp}$ alors

$$\begin{aligned} \Omega_p(e')(e') &= \left|\begin{array}{c|c} \left\|\text{pr}\,(e_1)\right\|^2 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \text{Gram}(e_2^p, e_2^p) \\ 0 & \end{array}\right| \\ &= \left\|\text{pr}\,(e_1)\right\|^2 \Omega_p(e)(e) \end{aligned}$$

d'où $\text{vol}_p(e) = \left\|\text{pr}\,(e_1)\right\| \text{vol}_{p-1}\,(e_2^p)$.

(c) Avec les notations précédentes, on a $\left\|\text{pr}\,(e_1)\right\| \leq \left\|e_1\right\|$ (par la relation de Pythagore) , donc

$$\text{vol}_p(e) \leq \left\|e_1\right\| \text{vol}_{p-1}\,(e_2^p)\ .$$

Par récurrence on obtient $\text{vol}_p(e) \leqslant \prod\limits_{i=1}^{p} \left\|e_i\right\|$.

Si $\text{vol}_p(e) = \prod\limits_{i=1}^{p} \left\|e_i\right\|$ alors on a

$$\text{vol}_p(e) = \left\|\text{pr}\,(e_1)\right\| \text{vol}_{p-1}\,(e_2^p)\,, \qquad \left\|\text{pr}\,(e_1)\right\| \leq \left\|e_1\right\| \qquad \text{et} \qquad \text{vol}_p(e_2^p) \leqslant \prod_{i=2}^{p} \left\|e_i\right\|$$

donc forcement on a $\left\|\text{pr}\,(e_1)\right\| = \left\|e_1\right\|$ et $\text{vol}_{p-1}\,(e_2^p) = \prod\limits_{i=2}^{p} \left\|e_i\right\|$, ce qui donne $e_1 \in (e_2^p)^{\perp}$.

Par récurrence on a e est une famille orthogonale . La réciproque découle du fait que e est une famille orthogonale et

$$\text{Gram}(e,e) = \mathit{diag}(\left\|e_1\right\|^2, ..., \left\|e_p\right\|^2).$$

(9) (a) On a $e_j = \sum\limits_{i=1}^{p} (P_b^e)_{ij}\, b_i$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, d'après 7.(a).,

$$\Omega_p(e)(e) = \det\,(P_b^e)^2\, \Omega_p(b)(b) = \det\,(P_b^e)^2$$

de plus $\Omega_p(b)(b) = 1$ (car b est orthonormée), donc

$$\Omega_p(e)(e) \det\,(P_b^e)^2$$

et

$$\text{vol}_p(e) = \sqrt{\Omega_p(e)(e)} = |\det\,(P_b^e)|$$

(b) Si l'une des famille e ou e' est liée, alors on a $\Omega_p(e)(e') = \Omega_p(e')(e) = 0$, l'inégalité est vérifiée.
Si e et e' sont libres, soit $V = vect(e)$ et $V' = vect(e')$, il sont de dimension p , on utilise les deux bases orthonormée u et u' construites dans la question 1.b) .
La question 7.a) donne

$$\Omega_p(e)(e') = \det(P_u^e)\det(P_{u'}^{e'})\Omega_p(u)(u')$$

donc

$$|\Omega_p(e)(e')| = \mathrm{vol}_p(e)\,\mathrm{vol}_p(e')\,|\Omega_p(u)(u')|$$

d'après 4.c) on a $|\Omega_p(u)(u')| \leq 1$ ce qui donne

$$|\Omega_p(e)(e')| \leqslant \mathrm{vol}_p(e)\,\mathrm{vol}_p(e')$$

- PARTIE III -

(10) (a) Soit $\omega \in \mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$ et $u = (x_1,..,x_p) \in E^p$ avec $x_i = \sum\limits_{j=1}^{d} a_{i,j}e_j$ pour tout i dans $[\![1,p]\!]$.
L'application ω est p linéaire donc

$$\omega(u) = \sum_{1\leq j_1,..,j_p\leq d}\left(\prod_{i=1}^{p} a_{i,j_i}\right)\ \omega(e_{j_1},..,e_{j_p})$$

Si on a $j_k = j_\ell$, alors comme ω est alterné, on a $\omega\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_p}\right) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\omega(u) &= \sum_{\substack{1\leq j_1<..<j_p\leq d\\ \sigma\in\mathfrak{S}_p}}\left(\prod_{i=1}^{p} a_{i,\sigma(j_i)}\right)\omega(e_{\sigma(j_1)},..,e_{\sigma(j_p)})\\
&= \sum_{\substack{1\leq j_1<..<j_p\leq d\\ \sigma\in\mathfrak{S}_p}}\varepsilon(\sigma)\left(\prod_{i=1}^{p} a_{i,\sigma(j_i)}\right)\omega(e_{j_1},..,e_{j_p})\\
&= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega\left(e_\alpha\right)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{p} a_{i,\sigma(j_i)}
\end{aligned}$$

e est une base orthonormée de E donc $a_{i,j} = \langle x_i, e_j\rangle$ et

$$\begin{aligned}
\omega(u) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega\left(e_\alpha\right)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{p}\left\langle x_i, e_{\sigma(j_i)}\right\rangle\\
&= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega\left(e_\alpha\right)\Omega_p\left(e_\alpha\right)(u)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\omega = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega\left(e_\alpha\right)\Omega_p\left(e_\alpha\right)$.

(b) Il est clair que l'application $(\omega,\omega') \longmapsto \langle\omega,\omega'\rangle = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega\left(e_\alpha\right)\omega'\left(e_\alpha\right)$ est bilinéaire et symétrique .
De plus, on a

$$\langle\omega,\omega\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega\left(e_\alpha\right)^2 \geqslant 0$$

et $\langle\omega,\omega\rangle = 0$ si, et seulement si, $\forall\alpha\in\mathcal{I}_p, \omega\left(e_\alpha\right) = 0$, or $\omega = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega\left(e_\alpha\right)\Omega_p\left(e_\alpha\right)$, donc $\omega = 0$.
Ainsi $(\omega,\omega') \longmapsto \langle\omega,\omega'\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$.
Soit $\alpha,\beta\in\mathcal{I}_p$, alors

$$\left\langle\Omega_p\left(e_\alpha\right),\Omega_p\left(e_\beta\right)\right\rangle = \sum_{\gamma\in\mathcal{I}_p}\Omega_p\left(e_\alpha\right)\left(e_\gamma\right)\Omega_p\left(e_\beta\right)\left(e_\gamma\right)$$

Si $\alpha=\gamma$ alors $\Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma)=1$ et si $\alpha\neq\gamma$ alors $\Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma)=0$ car une ligne de $\text{Gram}(e_\alpha,e_\gamma)$ est nulle , donc $\Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma)=\delta_{\alpha,\gamma}$, par suite

$$\langle\Omega_p(e_\alpha),\Omega_p(e_\beta)\rangle=\sum_{\gamma\in\mathcal{I}_p}\delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\gamma}=\delta_{\alpha,\beta}$$

Ainsi la famille $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{I}_p}$ est orthonormée.

(c) $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{I}_p}$ est orthonormée donc elle est libre , de plus elle est génératrice d'après 10.a). Ainsi $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{I}_p}$ est une base orthonormée de $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$. On a $\dim(\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R}))=\text{Card}(\mathcal{I}_p)=\binom{p}{d}$.

(d) Soit $\alpha\in\mathcal{I}_{d-1}$, on note $i_\alpha=[\![1,d]\!]\setminus\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1}\}$. Soit f l'application linéaire de $\mathcal{A}_{d-1}(E,\mathbb{R})$ vers E telle que $f(\ \Omega_{d-1}(e_\alpha)\ )=e_{i_\alpha}$. Comme f transforme une base orthonormée en une une base orthonormée, donc c'est une isométrie entre $\mathcal{A}_{d-1}(E,\mathbb{R})$ et E .

(11) Soit $u,v\in E^p$, d'après 10.a) , appliquée à $\omega=\Omega_p(u)$, on a :

$$\begin{aligned}\Omega_p(u)(v)&=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\Omega_p(u)(e_\alpha)\,\Omega_p(e_\alpha)(v)\\&=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\Omega_p(u)(e_\alpha)\,\Omega_p(v)(e_\alpha)\\&=\langle\Omega_p(u),\Omega_p(v)\rangle\end{aligned}$$

(12) Soit e et e' sont deux bases orthonormées de E , alors $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{I}_p}$ et $(\Omega_p(e'_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{I}_p}$ sont deux bases orthonormées de $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$, donc on a

$$\begin{aligned}\langle\omega,\omega'\rangle&=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\langle\omega,\Omega_p(e_\alpha)\rangle\langle\omega',\Omega_p(e_\alpha)\rangle\\&=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\langle\omega,\Omega_p(e'_\alpha)\rangle\langle\omega',\Omega_p(e'_\alpha)\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle\omega,\omega'\rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

- PARTIE IV -

(13) (a) On note $V=\text{Vect}(e)$ et $V'=\text{Vect}(e')$.

Si $V=V'$, alors on a

$$\Omega_p(e')=\det\left(P_e^{e'}\right)\Omega_p(e)$$

donc, $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires.

Réciproquement, si $\Omega_p(e)=\lambda\Omega_p(e')$.

Soit u et u' les familles de la question 1.b) qui sont des bases orthonormées de V et V'.

Donc

$$\begin{aligned}\Omega_p(u)(u')&=\det(P_e^u)\,\Omega_p(e)(u')\\&=\lambda\det(P_e^u)\,\Omega_p(e')(u')\\&=\lambda\det(P_e^u)\det\left(P_{u'}^{e'}\right)\Omega_p(u')(u')\\&=\lambda\det(P_e^u)\det\left(P_{u'}^{e'}\right)\quad(\text{ car } u' \text{ est orthonormée })\end{aligned}$$

de même ,

$$\begin{aligned}
\Omega_p(u')(u) &= \det\left(P_{e'}^{u'}\right)\Omega_p(e')(u) \\
&= \frac{1}{\lambda}\det\left(P_{e'}^{u'}\right)\Omega_p(e,u) \\
&= \frac{1}{\lambda}\det\left(P_{e'}^{u'}\right)\det\left(P_u^{e}\right)\Omega_p(u,u) \\
&= \left(\lambda\det\left(P_{u'}^{e'}\right)\det\left(P_e^{u}\right)\right)^{-1} \\
&= \Omega_p(u')(u)^{-1} = \Omega_p(u)(u')^{-1}
\end{aligned}$$

ainsi $\Omega_p(u)(u') = 1$ d'après 4.c) on a $V = V'$.

(b) Soit (V, C) un sous espace orienté et $e \in C$, soit b la base orthonormée obtenue par l'orthonormalisation de Schmidt, la matrice de passage de e à b est triangulaire supérieure de diagonale strictement positive, donc b est de même orientation que e ,elle est directe.
On a

$$\mathrm{vol}_p(e) = |\det(P_b^e)| = \det(P_b^e)$$

donc

$$\Omega_p(e) = \det(P_b^e)\,\Omega_p(b) = \mathrm{vol}_p(e)\Omega_p(b)$$

Si $e' \in C$ et b' la base orthonormée de Schmidt associée ,alors b et b' sont dans C , donc

$$\det P_b^{b'} > 0$$

$P_b^{b'}$ est une matrice orthogonale donc $\det P_b^{b'} = 1$ et $\Omega_p(b) = \Omega_p(b')$.
Posons $\Psi(V, C) = \Omega_p(b)$ qui ne dépend pas de e et $\Psi(V, C) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.
Pour l'unicité on prend e orthonormée.

(14) (a) Soit b une base orthonormée directe de V , on la complète en une base, B , orthonormée de E , on a $\Psi(V, C) = \Omega_p(b)$, la famille $(\Omega_p(B_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{I}_p}$ est orthonormée ($\exists \alpha \in \mathcal{I}_p$ telle que $b = B_\alpha$) donc $\Psi(V, C)$ est dans la sphère de rayon 1 de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.
Soit (V, C) et (V', C') dans $\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E)$, on suppose que $\Psi(V, C) = \Psi(V', C')$. Considérons des bases e et e' de V et V', donc

$$\Omega_p(e) = \mathrm{vol}_p(e)\Psi(V, C) = \mathrm{vol}_p(e)\,\mathrm{vol}_p(e')^{-1}\,\Omega_p(e')$$

Ainsi, $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires et par 13.a), on a $V = V'$.
Soit $e \in C$ et $e' \in C'$ orthonormées, alors

$$\Psi(V, C) = \Omega_p(e) = \Psi(V, C') = \Omega_p(e') = \det\left(P_e^{e'}\right)\Omega_p(e')$$

comme $\Omega_p(e') \neq 0$, on en déduit que $\det\left(P_e^{e'}\right) = 1 > 0$, donc $C = C'$.

(b) Ψ est bornée sur $\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E)$ donc $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E))$ est borné.
Montrons que $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E))$ est fermé : soit e une base de E et (ψ_n) une suite de $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E))$ convergente dans $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ vers ψ , elle s'écrit $\psi_n = \Psi(V_n, C_n)$, soit b^n une base orthonormée directe de (V_n, C_n).
On a

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}(\psi_n - \psi)^2(e_\alpha) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc

$$\psi_n(e_\alpha) \underset{n\to+\infty}{\to} \psi(e_\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathcal{I}_p$$

de plus $\psi_n(e_\alpha) = \Omega_p(b^n)(e_\alpha)$, comme les éléments de b^n sont unitaires donc on peux en extraire une sous suite convergente $b^{\varphi(n)}$, soit b sa limite , par continuité du produit scalaire b est orthonormée , posons $V = vect(b)$ et C l'orientation de b. On a

$$\Omega_p(b)(e_\alpha) = \Psi(V, C)(e_\alpha)$$

Ω_p est continue de E^p vers $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$ donc

$$\Psi(V_{\varphi(n)}, C_{\varphi(n)})(e_\alpha) = \Omega_p(b^{\varphi(n)})(e_\alpha) \underset{n\to+\infty}{\to} \Omega_p(b)(e_\alpha) = \Psi(V,C)(e_\alpha)$$

d'où

$$\Psi(V_{\varphi(n)}, C_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\to} \Psi(V,C) \text{ et } \Psi(V_n, C_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \Psi(V,C)$$

(ψ_n) converge dans $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p,E))$, qui est donc fermé .
$\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$ est de dimension finie donc $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p,E))$ est un compact.

(15) On suppose que $p \leqslant d-1$. Soit V, V' deux sous espaces de dimension p.
Si $V \neq V'$, soit u et u' les deux familles associées à V et V' définies dans $1.b$). On rappelle que $W_k = \mathrm{Vect}\,(u_k, u'_k)$ sont deux à deux orthogonaux. On note

$$e_k(t) = tu'_k + (1-t)u_k \in W_k \backslash \{0\} \quad , \quad f_k(t) = \frac{e_k(t)}{\|e_k(t)\|}$$

et $V_t = \mathrm{Vect}\,(f_1(t), \ldots, f_p(t))$ avec C_t l'orientation associée.
La famille $(f_k(t))_{1\leq k\leq p}$ est une base orthonormée directe de (V_t, C_t) , posons $f : t \mapsto (f_1(t), \ldots, f_p(t))$, on a

$$\Psi\left(V_t, C_t\right) = \Omega_p(f(t))$$

L'application $\varphi_{V,V'} : t \longmapsto \Psi\left(V_t, C_t\right) = \Omega_p(f(t))$ est un chemin, continue dans $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p,E))$, tel que

$$\varphi_{V,V'}(0) = \Psi(V,C) \text{ et } \varphi_{V,V'}(1) = \Psi\left(V', C'\right).$$

Si $V = V'$ et $C \neq C'$. Comme $p \leqslant d-1$ alors $V^\perp \neq \{0\}$, soit $v \in V^\perp$ de norme 1. On note $W = vect\,(e_1 + v, e_2, \ldots, e_n)$, qui est différent de V , on définit les applications $\varphi_{V,W}$ et $\varphi_{W,V'}$ et posons

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0,1] & \to & \Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p,E)) \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{V,W}(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \varphi_{W,V'}(2t-1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array} \right. \end{array}$$

φ est un chemin continue dans $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p,E))$ reliant $\Psi(V,C)$ et $\Psi\left(V, C'\right)$.
Ainsi $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p,E))$ est connexe par arcs .
Réciproquement, si $p = d$. Alors, on a deux orientations C et C' de E et alors $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(d,E)) = \{\Psi(E,C), \Psi\left(E,C'\right)\}$ et $\Psi(E,C) \neq \Psi\left(E,C'\right)$ donc $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(d,E))$ n'est pas connexe par arcs .