ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2012 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – B – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Valeurs d'adhérence de séries entières sur le cercle de convergence

La notation i étant réservée (c'est un nombre complexe dont le carré est -1) les candidats éviteront de l'utiliser à d'autres fins, par exemple comme indice de suite, de sommation ou de produit.

Première partie : convergence au sens de Césaro

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On dit qu'elle est C-convergente si la suite $(m_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad m_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1}$$

est convergente et on appelle alors C-limite de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la limite de la suite $(m_n)_{n\geqslant 0}$.

1. Montrer que toute suite convergente est C-convergente et donner un exemple de suite C-convergente mais non convergente.

2. Montrer que si la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est C-convergente, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.

3. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, la suite de terme général $a_n = (-1)^n n^\alpha$ est C-convergente.

Si $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombre complexes, on dit que la série $\sum b_n$ est C-convergente si la suite des sommes partielles de la série est C-convergente et la C-limite de la suite des sommes partielles sera appelée C-limite de la série.

Soit $\sum c_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note pour tout $n \geqslant 0$,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, z^k, \qquad \sigma_n(z) = \frac{S_0(z) + S_1(z) + \cdots + S_n(z)}{n+1} \ .$$

4. Soit z_0 un nombre complexe tel que la série $\sum c_n\, z_0^n$ soit C-convergente. Montrer que $|z_0| \leqslant R$.

Si $z_0 \in \mathbf{C}$ est tel que $\sum c_n\, z_0^n$ est C-convergente, on note $\sigma(z_0)$ sa C-limite. On note F l'ensemble des nombres complexes de module R pour lesquels la série est C-convergente.

5. Pour chacune des séries entières $\sum c_n\, z^n$ suivantes, déterminer le rayon de convergence, l'ensemble F et la valeur de $\sigma(z)$ pour tout $z \in F$.

5a. $\forall n \in \mathbf{N},\ c_n = 1$.

5b. $\forall n \in \mathbf{N}$, $c_{2n} = \alpha, \quad c_{2n+1} = \alpha + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \quad \beta \neq 0, \quad 2\alpha + \beta \neq 0$.

5c. $\forall n \in \mathbf{N}$, $c_n = 1 + \alpha e^{in\lambda}, \quad \alpha \in]0,1[, \quad \lambda \in \mathbf{R}$.

Deuxième partie : un théorème de Kronecker

On rappelle que des nombres réels $x_1, \dots, x_m$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ s'ils forment un système libre de $\mathbf{R}$ considéré comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.

Soit $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Il est muni de la norme définie pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ par

$$||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| \ .$$

Si $\lambda \in \mathbf{R}$, on désigne par $e_\lambda \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ la fonction définie par $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$. Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace de $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ engendré par les fonctions e_λ, $\lambda \in \mathbf{R}$.

6a. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ qu'on note $M(f)$. Vérifier que $f \mapsto M(f)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}$.

6b. Montrer que $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ est une base de $\mathcal{E}$ et que pour tout $f \in \mathcal{E}$, $M(f)$ est la coordonnée de f suivant e_0 dans la base des $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$.

6c. Montrer que si $f, g \in \mathcal{E}$ alors il en est de même de fg. Dans le cas où g est à valeurs réelles positives, établir que $|M(fg)| \leqslant ||f||_\infty M(g)$.

7. On pose pour tout entier $N \geqslant 0$, $K_N = \displaystyle\sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j$.

7a. Montrer que $K_N(t) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{2j}{N+1} \cos((N+1-j)t)$.

7b. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$,

$$\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} = \sum_{k=0}^{N} e^{i(\frac{N}{2}-k)t} \text{ puis que } K_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2 .$$

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 1$, des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, des nombres réels positifs $r_0, \ldots, r_{n+1}$ et des nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$.

Pour $j = 1, \ldots, n+1$, on pose $a_j = r_j e^{i\alpha_j}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = r_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} a_j\, e^{i\lambda_j x}$.

8. Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $g_N(x) = \displaystyle\prod_{p=1}^{n+1} K_N(\lambda_p x + \alpha_p)$.

8a. Écrire g_N comme combinaison linéaire de fonctions e_λ avec λ de la forme

$$\lambda = k_1\lambda_1 + \cdots + k_{n+1}\lambda_{n+1},\ k_i \in \{-N, \ldots, N\}\ .$$

En déduire que $M(g_N) = 1$.

8b. Montrer que $M(fg_N) = r_0 + \dfrac{N}{N+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} r_j$.

8c. En déduire que $||f||_\infty = \displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} r_j$, (on pourra utiliser **6c**).

9. Soient $u_1, \ldots, u_m$ des nombres complexes de module 1 et ε un réel strictement positif. On suppose que $|u_1 + \cdots + u_m| \geqslant m - \varepsilon$. Montrer que si $k \neq j$ on a $|u_k + u_j| \geqslant 2 - \varepsilon$ et $|u_k - u_j| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}$.

Dans la suite on suppose de plus que $\lambda_{n+1} = 2\pi$, $r_j = 1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $\alpha_{n+1} = 0$, de sorte que $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} e^{i\alpha_j} e^{i\lambda_j x} + e^{i2\pi x}$.

10a. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels $(x_m)_{m\in\mathbf{N}}$ telle que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} |f(x_m)| = n+2$.

10b. Montrer qu'une telle suite $(x_m)_{m\in\mathbf{N}}$ vérifie pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\lim_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j x_m} = e^{-i\alpha_j}, \quad \lim_{m\to+\infty} e^{i2\pi x_m} = 1\ .$$

10c. Posons $x_m = N_m + y_m$, avec $y_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $N_m \in \mathbf{Z}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} y_m = 0$, puis que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{-i\alpha_j}$.

11. Dans cette question, on considère le cas particulier où $\alpha_j = \pi$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, de sorte que $f(x) = 1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda_j x} + e^{i2\pi x}$.

11a. Montrer que sur tout intervalle fermé borné I de $\mathbf{R}$, $\displaystyle\sup_{x\in I} |f(x)| < n+2$.

11b. En déduire l'existence d'une suite $(N'_m)_{m\in\mathbf{N}}$ d'entiers relatifs telle que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} N'_m = \pm\infty$

et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\lim_{m \to +\infty} e^{i\lambda_j N'_m} = -1$. Que peut-on dire des suites $(e^{i2\lambda_j N'_m})_{m\in\mathbf{N}}$?

12. Déduire de ce qui précède le théorème suivant.

Théorème de Kronecker. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels. Alors il existe une suite $(N_m)_{m\in\mathbf{N}}$ d'entiers naturels tels que $\lim_{m\to+\infty} N_m = +\infty$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\lim_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{i\alpha_j}$.

Troisième partie : valeurs d'adhérence aux points de C-convergence

On rappelle que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)}$.

Les valeurs d'adhérence d'une série sont celles de la suite de ses sommes partielles. Si $\sum c_n z^n$ est une série entière et $z_0 \in \mathbf{C}$, on note $\mathcal{L}(z_0)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la série $\sum c_n z_0^n$. Dans cette partie, on étudie l'ensemble $\mathcal{L}(z_0)$, $z_0 \in F$, pour les exemples de la question **5**. Les notations F, $\sigma(z)$ sont celles de la première partie.

13a. On reprend l'exemple **5a**. Déterminer $\mathcal{L}(e^{ix})$, lorsque $\dfrac{x}{\pi} \in \mathbf{Q}$. Lorsque $\dfrac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$, montrer que $\mathcal{L}(e^{ix})$ est un cercle de centre $\sigma(e^{ix})$ dont on déterminera le rayon.

13b. On reprend l'exemple **5b**. On suppose que $\dfrac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$, $\alpha \neq 0$ et $\frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbf{R}$. Montrer que $\mathcal{L}(e^{ix})$ est réunion de deux cercles de centre $\sigma(e^{ix})$ dont on déterminera les rayons.

13c. On reprend l'exemple **5c**. On suppose que les nombres x, λ, π sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Montrer que pour $\alpha > 0$ suffisamment petit,

$$\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\zeta \in \mathbf{C};\ |\zeta - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]\}$$

pour des réels $0 < r_1 < r_2$ que l'on déterminera.

* *
*