

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – B – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

*Toute affirmation doit être justifiée. On prendra soin à la clarté et à la précision de la rédaction.*

## Notations

Soit  $d$  un entier strictement positif. On note  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille  $d$  et  $I_d$  désigne la matrice identité. Le produit de deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$  est noté  $A \times B$  ou simplement  $AB$ . On appelle commutateur de  $A$  et  $B$  la matrice

$$[A, B] = AB - BA.$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$  est définie par

$$\exp(A) = I_d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

On munit  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$  d'une norme d'algèbre  $\|\cdot\|$ , c'est-à-dire que pour toutes matrices  $A, B$  de  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ ,

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

On note  $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$  le groupe linéaire des matrices de  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$  qui sont inversibles, et  $\mathrm{SL}_d(\mathbf{R})$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$  formé des matrices de déterminant 1.

La première et la troisième parties sont consacrées à l'étude de matrices carrées de taille  $d = 3$ . La deuxième partie est largement indépendante des autres parties.

## Première partie

On considère l'ensemble des matrices carrées de taille 3 triangulaires supérieures strictes :

$$\mathbf{L} = \{M_{p,q,r} \mid (p, q, r) \in \mathbf{R}^3\} \quad \text{où} \quad M_{p,q,r} = \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit  $\mathbf{H} = \{I_3 + M \mid M \in \mathbf{L}\}$ .

1. Calculer l'exponentielle de la matrice  $M_{p,q,r}$ .

2a. Montrer que l'on définit une loi de groupe  $*$  sur  $\mathbf{L}$  en posant pour  $M, N \in \mathbf{L}$  :

$$M * N = M + N + \frac{1}{2}[M, N].$$

On explicitera l'inverse de  $M_{p,q,r}$ .

2b. Déterminer les matrices  $M_{p,q,r} \in \mathbf{L}$  qui commutent avec tous les éléments de  $\mathbf{L}$  pour la loi  $*$ .  $(\mathbf{L}, *)$  est-il commutatif?

3. Montrer que pour toutes matrices  $M, N \in \mathbf{L}$ , on a :

$$(\exp M) \times (\exp N) = \exp(M * N).$$

4. Soient  $M$  et  $N$  deux éléments de  $\mathbf{L}$ . Montrer que

$$\exp([M, N]) = \exp(M) \exp(N) \exp(-M) \exp(-N).$$

5. Montrer que  $\mathbf{H}$  muni du produit usuel des matrices est un sous-groupe de  $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})$  et que

$$\exp : (\mathbf{L}, *) \rightarrow (\mathbf{H}, \times)$$

est un isomorphisme de groupes.

## Deuxième partie

On considère dans cette partie deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ .

Dans les questions 6 et 7, on suppose de plus que  $A$  et  $B$  commutent avec  $[A, B]$ .

6a. Montrer que  $[A, \exp(B)] = \exp(B)[A, B]$ .

6b. Déterminer une équation différentielle vérifiée par  $t \mapsto \exp(tA) \exp(tB)$ .

6c. En déduire la formule :

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right).$$

7. On note  $\mathcal{L} = \mathrm{Vect}(A, B, [A, B])$ .

7a. Si  $M, N \in \mathcal{L}$ , montrer que  $[M, N]$  commute avec  $M$  et  $N$ .

7b. Soit  $G = \{\exp(M) \mid M \in \mathcal{L}\}$ . Montrer que  $(G, \times)$  est un groupe et que l'application

$$\Phi : \mathbf{H} \rightarrow G, \quad \exp(M_{p,q,r}) \mapsto \exp(pA + qB + r[A, B]),$$

est un morphisme de groupes.

Dans toute la suite de cette partie,  $A$  et  $B$  sont à nouveau deux matrices quelconques de  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ .

**8.** Soit  $(D_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$  qui converge vers  $D \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ . Elle est donc bornée : soit  $\lambda > 0$  tel que pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\|D_n\| \leq \lambda$ .

**8a.** Soit  $k \in \mathbf{N}$ . Justifier que  $\frac{n!}{(n-k)!n^k} \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et que si  $n \geq k$  (et  $n \geq 1$ ),

$$0 \leq 1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k} \leq 1.$$

En déduire que

$$\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (D_n)^k \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

**8b.** Montrer que pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $n \geq 0$ ,

$$\|(D_n)^k - D^k\| \leq k\lambda^{k-1}\|D_n - D\|.$$

**8c.** Conclure que  $\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n \rightarrow \exp(D)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**9a.** Soit  $D \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$  telle que  $\|D\| \leq 1$ . Montrer qu'il existe une constante  $\mu > 0$  indépendante de  $D$  telle que

$$\|\exp(D) - I_d - D\| \leq \mu\|D\|^2.$$

**9b.** Montrer qu'il existe une constante  $\nu > 0$ , et pour tout  $n \geq 1$  une matrice  $C_n \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ , tels que

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) = I_d + \frac{A}{n} + \frac{B}{n} + C_n \quad \text{et} \quad \|C_n\| \leq \frac{\nu}{n^2}.$$

**10.** Déduire de ce qui précède que

$$\exp(A+B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right)^n.$$

### Troisième partie

Soit  $T$  un réel strictement positif. On note  $E(T)$  l'ensemble constitué des couples  $(u, v)$  de fonctions continues sur  $[0, T]$  à valeurs réelles.

Un *chemin de Carnot contrôlé par*  $(u, v) \in E(T)$  est une application  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  de classe  $C^1$  solution de l'équation différentielle matricielle :

$$\begin{cases} \gamma'(t) = u(t)\gamma(t)M_{1,0,0} + v(t)\gamma(t)M_{0,1,0}, \\ \gamma(0) = I_3, \end{cases}$$

où les matrices  $M_{1,0,0}$  et  $M_{0,1,0}$  ont été introduites dans la première partie.

**11a.** Pour tout  $(u, v) \in E(T)$ , justifier l'existence d'un unique chemin de Carnot contrôlé par  $(u, v)$ .

**11b.** Montrer que  $\gamma$  vérifie

$$\forall t \in [0, T], \quad \gamma(t) \in \mathbf{H},$$

et calculer explicitement, en fonction de  $t$ ,  $u$  et  $v$  les fonctions  $p(t)$ ,  $q(t)$  et  $r(t)$  telles que

$$\gamma(t) = \exp(M_{p(t),q(t),r(t)}).$$

**12.** Pour tout  $(\theta, \varphi) \in \mathbf{R}^2$  et  $t \in \mathbf{R}$ , on définit les contrôles

$$u_{\theta,\varphi}(t) = \sin(\theta - \varphi t) \quad \text{et} \quad v_{\theta,\varphi}(t) = \cos(\theta - \varphi t),$$

et on note  $\gamma_{\theta,\varphi}(t) = \exp(M_{p(t),q(t),r(t)})$  le chemin de Carnot contrôlé par  $(u_{\theta,\varphi}, v_{\theta,\varphi})$ .

**12a.** On suppose  $\varphi \neq 0$ . Calculer  $p(t)$  et  $q(t)$  et vérifier que

$$r(t) = \frac{t\varphi - \sin(t\varphi)}{2\varphi^2}.$$

**12b.** Calculer de même  $\gamma_{\theta,0}(t)$ .

La *sphère de Carnot* est l'ensemble :

$$B(1) = \{(p, q, r) \in \mathbf{R}^3 \mid \exists (\theta, \varphi) \in [-\pi, \pi] \times [-2\pi, 2\pi], \gamma_{\theta,\varphi}(1) = \exp(M_{p,q,r})\}.$$

**13.** On définit les fonctions  $f$  et  $g$  sur  $]0, 2\pi[$  par :

$$f(s) = \frac{2(1 - \cos s)}{s^2} \quad \text{et} \quad g(s) = \frac{s - \sin s}{2s^2}.$$

Montrer que  $f$  et  $g$  se prolongent par continuité sur  $[0, 2\pi]$ ; que  $f$  est alors une bijection continue de  $[0, 2\pi]$  sur un ensemble qu'on précisera; et que  $g$  atteint son maximum en  $\pi$ .

**14.** Montrer que si  $(p, q, r) \in B(1)$  avec  $r \geq 0$  alors  $r = g \circ f^{-1}(p^2 + q^2)$ .

Énoncer et établir une réciproque.

On pourra donner l'allure de la fonction  $s \mapsto g \circ f^{-1}(s^2)$  pour  $s \in [0, 1]$  et notamment les tangentes en  $s = 0$  et  $s = 1$ .

**15.** Montrer l'existence d'une constante  $c_1 > 0$  telle que pour tout  $(p, q, r) \in B(1)$ , on ait

$$c_1^{-1} \leq p^2 + q^2 + |r| \leq c_1.$$

**16a.** Montrer que pour tout  $(p, q, r) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , il existe un unique  $\lambda > 0$  tel que :

$$(\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r) \in B(1).$$

**16b.** En déduire que pour tout point  $A \in \mathbf{H}$ , il existe un réel positif  $T(A)$  et des paramètres  $(\theta, \varphi)$  (dépendants également de  $A$ ) tels que  $A$  soit l'extrémité du chemin de Carnot contrôlé par  $(u_{\theta,\varphi}, v_{\theta,\varphi}) \in E(T(A))$ .

**16c.** Montrer l'existence d'une constante  $c_2 > 0$  telle que pour tout  $(p, q, r) \in \mathbf{R}^3$ ,

$$c_2^{-1} \sqrt{p^2 + q^2 + |r|} \leq T(\exp(M_{p,q,r})) \leq c_2 \sqrt{p^2 + q^2 + |r|}.$$

\* \*  
\*